OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a XII-a
16.02.2013

Subiectul I.(40 puncte)

Pe mulțimea $G=(1,\infty)$ se consideră legea de compoziție $x*y=\sqrt{(xy)^2-(x^2+y^2)+2}, \forall x,y\in G$.

a) Determinați elementul neutru al legii de compoziție;

b) Rezolvați ecuația $\lg(x*3)=\frac{1}{2}+\log_{100}x$;

c) Dacă notăm $A(x,n)=\underbrace{x*x*...*x}_{de\ n\ ori}$ şi cu B simetricul lui $A(2,2013)$ în raport cu legea „$*$ “, aflați B.

prof. Cristian Petru Pop,ISJ Cluj

Subiectul II.(20 puncte)

Să se determine $n\in\mathbb{N}$, astfel încât $I_n\in\mathbb{Q}$, unde $I_n=\int_0^1\frac{6x^3-9x^2+7x-2}{(3x^2-3x+2)^n}dx$

prof. Eugen Jecan, Colegiul Național „Andrei Mureşanu”Dej

Subiectul III.(20 puncte)

Calculați $\mathrm{I}=\int\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^n x+a^n}dx$,unde $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, $a\geq 0$ şi $n\in\mathbb{N}^*$

prof. Ilie Diaconu, Liceul Teoretic "Avram Iancu" Cluj-Napoca

Subiectul IV.(10 puncte)

Fie $f:[0;1]\to\mathbf{R}$ o funcție continuă având proprietatea $\int_0^1 xf(x)dx\geq\ln 2$. Să se arate că există $a\in(0,1)$ astfel încât $a^2f(a)+af(a)-1=0$.

prof. Gheorghe Lobonț, Colegiul Național „Mihai Viteazul”Turda

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.