CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ ”NICOLAE PAUN”

EDIȚIA A XIX-A 23 MARTIE 2013

SUBIECTE CLASA A IX-A

Problema 1. Fie $a,b>0$ distincte. Notam cu A,G si H media lor aritmetica,geometrica si respectiv armonica. Consideram mulţimea $M(a,b)=\{t\in[0,1]:tA+(1-t)H\geq G\}$.

a) Demonstraţi ca mulţimea M(a,b) este infinita ;
b) Determinaţi cel mai mic element al mulţimii M(a,b) .

Nicolae Bourbacut, Sarmizegetusa

Problema 2. Fie $(F_n)_{n\geq 0}$ şirul lui Fibonacci definit prin relaţia de recurenta

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1},\forall n\geq 1 \text{ si } \mathrm{F}_0=0, F_1=1.$$

a) Sa se arate ca $F_{n-1}F_{n+1}-F_n{}^2=(-1)^n,\forall n\geq 1.$

b) Sa se arate ca exista o infinitate de perechi de numere naturale (a,b) astfel încât

$$a\,|\,b^2+1 \text{ si } \mathrm{b}\,|\,a^2-1.$$

Vasile Pop, Cluj-Napoca

Problema 3. Definim şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ prin $a_n=n+d(\sqrt{n}),\forall n\geq 1.$ Determinaţi cel mai mic număr natural k pentru care termenii şirului $a_k, a_{k+1},...,a_{k+2012}$ reprezintă 2013 numere întregi consecutive (prin d(x) am notat cel mai apropiat întreg de x, i.e. d(x)=3 pentru orice $x\in\left[\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$).

Vasile Gorgotă, Rm. Vâlcea

Problema 4. Fie P un punct in interiorul triunghiului ABC astfel încât $PA>PB>PC$ iar cu segmentele PA,PB,PC se poate forma un triunghi obtuzunghic. Demonstraţi că unghiul BAC este ascuţit.

* **

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii, fiecare subiect fiind cotat cu 7 puncte. Timp de lucru 3 ore.