CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ ”NICOLAE PAUN”
EDIŢIA A XIX-A 23 MARTIE 2013

SUBIECTE CLASA A XI-A

Problema 1. Fie $A \in M_n(\mathbb{Z}), n \geq 2,$ astfel încât det(A)=0 si $A^* = \left[A_{ij}\right]_{i,j=\overline{1,n}}$ adjuncta matricii A.

a) Sa se arate ca $rang\left(A^*\right) \in \{0,1\}$.

b) Daca $A^t = A$ atunci $A_{ii}A_{jj}$ este pătrat perfect pentru orice $i, j \in \{1,2,...,n\}$.

Vasile Pop, Cluj-Napoca

Problema 2. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un sir de numere reale strict pozitive cu proprietatea ca pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc $(x_{n+1} - x_n)(x_n x_{n+1} - 1) \leq 0.$

a) Arătaţi ca şirul $(y_n)_{n\geq 1}, y_n = x_n + \dfrac{1}{x_n}$ este monoton.

b) Daca,in plus, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1,$ demonstraţi ca şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Mihai Piticari

Problema 3. a) Sa se arate ca $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + e^x$ este bijectiva.

b)Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$,şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este definit prin $x_n^{\ 3} + e^{x_n} = \dfrac{n+1}{n}, \forall n \geq 1.$

c) Sa se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

***

Problema 4. Se considera numerele reale a,b,c>0 cu a+b+c=1. Sa se determine toate funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifica relaţia

$$f(ax+by+cz) + f(cx+ay+bz) + f(bx+cy+az) = f(x) + f(y) + f(z)$$

pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Nicolae Bourbacut, Hunedoara

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii, fiecare subiect fiind cotat cu 7 puncte. Timp de lucru 3 ore.