CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ ”NICOLAE PAUN”
EDIŢIA a XIX-a 23 MARTIE 2013

SUBIECTE CLASA A XII-A

Problema 1. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit cu n elemente având elementul neutru e. Spunem ca subgrupul H al lui G are proprietatea (P) daca H este subgrup propriu al lui G si $\forall x, y \in G \setminus H \Rightarrow xy \in H.$

a) Daca exista subgrupurile distincte H_1 si H_2 ale lui G care au proprietatea (P) si $H_1 \cap H_2 = \{e\}$, sa se arate ca grupul G este izomorf cu grupul lui Klein.

b) Sa se demonstreze ca pentru $n \geq 2$, grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ are cel mult un subgrup cu proprietatea (P).

Dana Heuberger

Problema 2. Fie f un polinom cu coeficienţi întregi astfel încât $f(0), f(1), f(2), f(3)$ sa fie distincte modulo 4. Sa se arate ca $f(0), f(1), ..., f(7)$ sunt distincte modulo 8.

Vasile Pop

Problema 3. Consideram şirul $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sin x \cos x} (\cos x - \sin x)^{2n} (\cos x + \sin x) dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$

a) Sa se arate ca $I_n = (2n-1) I_{n-1} - 1.$

b) Sa se calculeze $\lim_{n \to \infty} n I_n.$

c) Sa se arate ca

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + ... + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)} \right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sin x \cos x} (\cos x + \sin x) dx.$$

Catalin Tigaeru, Suceava

Problema 4. Fie $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ cu coeficienţi pozitivi si grad(P)<grad(Q). Fie $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}_+$, doua funcţii continue si pozitive astfel încât

$$\int_0^1 \frac{f(x) dx}{P(n) + x} = \int_0^1 \frac{g(x) dx}{Q(n) + x}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 1.$$

Sa se arate ca $f(x) = 0, \forall x \in [0,1].$

***

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii, fiecare subiect fiind cotat cu 7 puncte. Timp de lucru 3 ore.