

INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE CLASA A IX-A

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5x + 3$ și numărul

$$S = \frac{1}{f(0) \cdot f(1)} + \frac{1}{f(1) \cdot f(2)} + \dots + \frac{1}{f(n-1) \cdot f(n)}, n \geq 1.$$

a) Verificați egalitatea: $\frac{1}{(5n-2) \cdot (5n+3)} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5n-2} - \frac{1}{5n+3} \right), \forall n \geq 1.$

b) Demonstrați că $S = \frac{n}{15n+9}, \forall n \geq 1.$

c) Să se determine numărul natural n , astfel încât $\frac{1}{\sqrt{S}}$ să fie număr natural.

Soluție:

a) Verificare 1p

b) $\frac{1}{f(0) \cdot f(1)} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8} \right)$ 1p

$\frac{1}{f(1) \cdot f(2)} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{13} \right)$ 1p

$\frac{1}{f(n-1) \cdot f(n)} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5n-2} - \frac{1}{5n+3} \right)$ 1p

Se adună relațiile și obținem $S = \frac{n}{15n+9}$ 2p

c) Se impune condiția ca $\frac{1}{S}$ să fie număr natural și pătrat perfect, de unde găsim $n = 9$ 1p

2. Doi elevi citec câte o carte astfel:

Primul citește în prima zi două pagini, apoi în fiecare zi citește un număr dublu de pagini față de ziua precedentă. Al doilea elev, citește în prima zi 3 pagini, a doua zi 12 pagini și în fiecare dintre zilele următoare cu **3p** pagini mai mult decât în ziua precedentă, unde **p** este numărul cu 1 mai mic decât dublul numărului zilei curente.

a) Demonstrați că, în a n-a zi, primul elev citește 2^n pagini, iar cel de-al doilea elev citește $3n^2$ pagini, utilizând metoda inducției matematice, $n \geq 1$.

b) Stabiliți, începând cu ce zi, primul elev va citi un număr de pagini mai mare decât numărul de pagini citite de al doilea elev.

Soluție:

- a) Primul elev citește $2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^n$ pagini (utilizând metoda inducție matematică). Al doilea elev, în ziua 1 citește $3 \cdot 1^2$ pagini, în ziua 2 citește $3 \cdot 2^2$ pagini, în ziua 3 citește $3 \cdot 3^2$ pagini și așa mai departe, în ziua n citește $3 \cdot n^2$ (utilizând metoda inducție matematică) 3p
b) Se arată că $2^n > 3 \cdot n^2, \forall n \geq 8$ 3p
Începând cu a 8-a zi primul elev va citi mai multe pagini decât al doilea elev 1p

3. Fie mulțimea $A = \{(x, a) \mid 2x^2 - 2ax + x + a^2 - 2a = 0, x \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}\}$.

- a) Să se determine a, dacă $(1, a) \in A$.
b) Să se determine x, dacă $(x, 1) \in A$.
c) Să se determine mulțimea A, știind că aceasta are cel puțin un element.

Soluție:

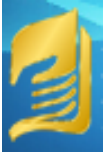
- a) Dacă $(1, a) \in A$, atunci $a^2 - 4a + 3 = 0$, de unde $a = 1$ sau $a = 3$ 2p
b) Dacă $(x, 1) \in A$, atunci $2x^2 - x - 1 = 0$, de unde $x = 1$ 2p
c) Din ipoteză, există x întreg și a real astfel încât $2x^2 - 2ax + x + a^2 - 2a = 0$ 1p
Cum a este real ecuația $a^2 - 2 \cdot (1+x) \cdot a + 2x^2 + x = 0$ are $\Delta \geq 0$. Deducem că $x^2 - x - 1 \leq 0$ 1p
Găsim $A = \{(0,0); (0,2); (1,1); (1,3)\}$ 1p

4. În triunghiul ABC, fie punctele M, N și P astfel încât: $4\overline{MC} = \overline{AC}$, $\overline{BN} + \overline{CN} = \vec{0}$, $2\overline{PB} = \overline{BA}$.

- a) Demonstrați că $\overline{MN} = \frac{1}{4}(\overline{AB} + \overline{CB})$.
b) Demonstrați că punctele M, N și P sunt coliniare.

Soluție:

- a) $\overline{MN} = \overline{MC} + \overline{CN}$ 1p
Obținem $\overline{MN} = \frac{1}{4} \cdot (\overline{AB} + \overline{CB})$ 2p
b) Avem $\overline{NP} = \overline{NB} + \overline{BP}$ 1p
Obținem $\overline{NP} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{CB})$ 1p
Rezultă că $\overline{NP} = 2 \cdot \overline{MN}$ 1p
Concluzia: Punctele M, N și P sunt coliniare 1p



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A X-A

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = 4z - \bar{z}$, unde \bar{z} reprezintă conjugatul numărului complex z .
- Determinați $z \in \mathbb{C}$, dacă $f(z) = 2013 + 2015 \cdot i$.
 - Calculați $(f \circ f)(z)$.
 - Demonstrați că funcția dată este bijectivă.

Soluție:

- Alegând $z = x + i \cdot y$, obținem $f(z) = 3 \cdot x + 5i \cdot y$ 1p
Identificând obținem $z = 671 + 403 \cdot i$ 1p
- Calculează $(f \circ f)(z) = f(4z - \bar{z}) = 17z - 8\bar{z}$ 2p
- Verificăm că funcția este injectivă și surjectivă 1p
Pentru injectivitate, verificăm $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$.
Fie $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$ și $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$.
Atunci $f(z_1) = f(z_2) \Leftrightarrow 3 \cdot x_1 + 5i \cdot y_1 = 3 \cdot x_2 + 5i \cdot y_2$, deci $x_1 = x_2$ și $y_1 = y_2$ 1p
Pentru surjectivitate verificăm că $\forall w \in \mathbb{C}, \exists z \in \mathbb{C}$ astfel încât $f(z) = w$.
Pentru $w = a + ib$ fixat, există $z = \frac{a}{3} + \frac{b}{5} \cdot i$ astfel încât $f(z) = w$
Așadar funcția este surjectivă 1p

2. Plecat în vacanță împreună cu părinții, în mașina familiei, Costel a adormit după ce a constatat că trecuseră 342 de kilometri de la plecare. După ce s-a trezit a constatat amuzat că numărul kilometrilor parcurși, de la plecare, era tot un număr par care se putea forma cu aceleași cifre ca și numărul kilometrilor văzuți înainte de a adormi.
- Câți km au fost parcurși până în momentul trezirii lui Costel ?
 - După ce a văzut că dormise 90 de minute, precizați viteza medie cu care s-a deplasat mașina cât timp a dormit Costel, știind că nu a făcut nici o oprire.

Soluție:

- Deduce că numărul kilometrilor parcurși până la trezire este 432 2p
- Distanța parcursă pe durata somnului a fost de 90 de km 2p
Viteza medie a fost 60km/h 3p

3. Se consideră următoarele șiruri de numere $x_n = \frac{2013^n + 2012n - b}{a}$ și $y_n = \frac{2013^n - 2012n + b}{a}$, unde $a, b \in \mathbb{R}^*$ (arbitrar fixați), iar $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $(z_n)_{n \geq 1}$ este un șir de numere reale astfel încât $z_n = x_n - y_n$, se cere:
- a) Demonstrați că șirul $(z_n)_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică.
- b) Demonstrați că raportul $\frac{x_{n+1} + y_{n+1}}{x_n + y_n}$ nu depinde de n .

Soluție:

Obține $z_n = x_n - y_n = \frac{4024n - 2b}{a}$ 2p

Verifică $z_{n+1} - z_n = \frac{4024}{a}$ (constant), deci șirul este o progresie aritmetică 2p

b) Obține $x_n + y_n = \frac{2 \cdot 2013^n}{a}$ 1p

Obține $\frac{x_{n+1} + y_{n+1}}{x_n + y_n} = 2013$, exact ce trebuia demonstrat 2p

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + 2^{-x}$.

- a) Rezolvați ecuația $2 \cdot f(3x) = 5$.
- b) Determinați valorile parametrului real m știind că ecuația $f(x) = m$ admite o singură rădăcină reală.
- c) Rezolvați ecuația $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}}$, în mulțimea numerelor reale.

Soluție:

Obține ecuația: $2^{3x} + 2^{-3x} = \frac{5}{2}$ 1p

Obține: $2^{3x} = 2$, sau $2^{3x} = \frac{1}{2}$ 1p

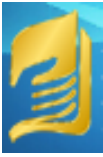
Finalizare: $x = \frac{1}{3}$, sau $x = -\frac{1}{3}$ 1p

Notând $2^x = t$, $t > 0$ ecuația devine $t^2 - m \cdot t + 1 = 0$ 1p

Ecuația are o singură rădăcină atunci când $\Delta = 0$, iar $t_1 = t_2 > 0$ sau când $\Delta > 0$ și $t_1 \cdot t_2 < 0$ 1p

Cum ultima opțiune nu este admisibilă deoarece $t_1 \cdot t_2 = 1 > 0$, rămâne că $\Delta = 0$, iar $m = 2$ 1p

c) Observând că $f(x) \geq 2$ și $\frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq 2$, deducem că singura rădăcină este $x = 0$ 1p



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XI-A

1. Se consideră matricile $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\det(A - xI_2) = 0$.

b) Determinați valorile parametrilor reali m și n dacă $A^3 = m \cdot A + n \cdot I_2$.

c) Demonstrați că $A^{2013} + A^{2012} = 2^{2012} \cdot (A + I_2)$.

Soluție:

a) $\det(A - xI_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ -2 & -2-x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x \in \{-1, 2\}$ 3p

b) Obține $A^3 = m \cdot A + n \cdot I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m+n & 2m \\ -2m & -2m+n \end{pmatrix}$ 1p

Finalizare: $m = 3, n = 2$ 1p

c) Prin inducție vom demonstra $P(n): A^{n+1} + A^n = 2^n \cdot (A + I_2), n \geq 1$ și apoi particularizăm $n = 2012$

Verificare $P(1): A^2 + A^1 = 2^1 \cdot (A + I_2)$ 1p

Demonstrarea implicației $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ 1p

2. O matrice pătratică de ordinul al treilea are toate elementele egale cu 1, 2 sau 3 (cel puțin câte unul din fiecare). Știind că suma tuturor elementelor matricei este egală cu 17, iar numărul elementelor egale cu 1 este cel puțin patru, se cere:

a) Să se afle câte elemente sunt din fiecare?

b) Exemplificați că printre matricele anterior determinate există atât matrice neinvertabile cât și matrice invertabile.

Soluție:

a) Fie x, y și z numărul elementelor respectiv egale cu 1, 2 sau 3.

Atunci: $x + y + z = 9$ și $x + 2y + 3z = 17, x > y, x > z$ 1p

Deduce $y + 2z = 8$ 1p

Dintre cazurile posibile numai $x = 4, y = 2, z = 3$ convine 3p

b) Exemplu de matrice invertabilă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \det(A) = 2$ 1p

Exemplu de matrice neinvertabilă $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \det(B) = 0$ 1p

3. Se consideră funcția $f_k : (-\infty, -1] \cup [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_k(x) = \sqrt{x^2 + x} - k \cdot x$, unde k este un număr real fixat.

a) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{2012}(x)}{f_{2013}(x)}$.

b) Demonstrați că $\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 1$

Soluție:

a) Scrie $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{2012}(x)}{f_{2013}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} - 2012x}{\sqrt{x^2 + x} - 2013x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 2012 \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 2013 \right)} = \frac{2011}{2012}$ 3p

b) Pentru $k > 1$ obținem $\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - k \right) = -\infty$, nu convine 1p

Pentru $k < 1$ obținem $\lim_{x \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - k \right) = +\infty$, nu convine 1p

Pentru $k = 1$ vom avea $\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \frac{1}{2}$ 2p

4. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

a) Determinați asimptotele verticale ale funcției.

b) Determinați asimptotele către $+\infty$ ale funcției.

c) Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ admite cel puțin o rădăcină subunitară.

Soluție:

a) Putem avea asimptote verticale doar la dreapta lui zero;

Deoarece $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \left[x + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \right] = -\infty$, rezultă ca $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta pentru graficul funcției 2p

b) Analizăm existența asimptotelor orizontale:

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \right] = \infty$, deci nu există asimptote orizontale 1p

Căutăm asimptote oblice către $+\infty$, de forma $y = mx + n$

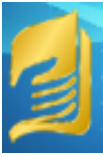
$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left[x + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \right] = 1$ 1p

$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - x \right) = 0$ 1p

Așadar, $y = x$ este asimptotă oblică către $+\infty$, pentru graficul funcției f .

c) Deoarece funcția f este continuă, $\lim_{x \searrow 0} f(x) = -\infty$, iar $f(1) = 1 + \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{e}{2} > 0$

Deducem că există cel puțin un $c \in (0, 1)$ astfel încât $f(c) = 0$ (proprietatea Darboux) 2p



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
9 martie 2013



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică : profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE CLASA A XII-A

1. a) Calculați $F(x) = \int \frac{1}{2^x + 3} dx, x \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $\int_{\log_2 3}^{\log_2 5} \frac{1}{2^x + 3} dx$.

c) Demonstrați că $F(x)$ este o funcție injectivă pe mulțimea \mathbb{R} .

Soluție:

Notăm $2^x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{dt}{t}$ 2p

Atunci $F^*(t) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \int \frac{dt}{t(t+3)}$. Obține $F^*(t) = \frac{1}{\ln 8} \cdot \ln\left(\frac{t}{t+3}\right) + C$ 1p

Finalizare : $F(x) = \frac{1}{\ln 8} \cdot \ln\left(\frac{2^x}{2^x + 3}\right) + C$ 1p

b) $\int_{\log_2 3}^{\log_2 5} \frac{1}{2^x + 3} dx = F(x) = \frac{1}{\ln 8} \cdot \ln\left(\frac{2^x}{2^x + 3}\right) \Big|_{\log_2 3}^{\log_2 5} = \frac{1}{\ln 8} \left(\ln \frac{5}{8} - \ln \frac{3}{6}\right) = \frac{\ln 5 - 2 \ln 2}{3 \ln 2}$ 1p

c) Deoarece $F'(x) = \frac{1}{2^x + 3} > 0$, pentru orice număr real x , rezultă că funcția $F(x)$ este strict crescătoare, deci este funcție injectivă 2p

2. Pe mulțimea $K = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $(a, x) \circ (b, y) = (ab, x + ay)$, pentru orice perechi $(a, x), (b, y) \in K$.

a) Verificați asociativitatea legii de compoziție.

b) Determinați perechea $(a, x) \in K$ care verifică relația $\underbrace{(a, x) \circ \dots \circ (a, x)}_{\text{de 9 ori}} = (512, -511)$.

c) Dați exemplu de o pereche $(a, x) \in K$ care să nu comute cu perechea $(2012, -2013)$.

Soluție:

a) Arătăm că $[(a, x) \circ (b, y)] \circ (c, z) = (a, x) \circ [(b, y) \circ (c, z)]$, pentru orice perechi din K .

Astfel $[(a, x) \circ (b, y)] \circ (c, z) = (abc, abz + ay + x)$ 1p

$(a, x) \circ [(b, y) \circ (c, z)] = (abc, abz + ay + x)$ 1p

b) Obține $\underbrace{(a, x) \circ \dots \circ (a, x)}_{\text{de 9 ori}} = (a^9, x(a^8 + a^7 + \dots + a + 1))$ 2p

Deduce $a = 2$ 1p

Deduce $x = -1$ 1p

c) Un exemplu îl constituie perechea $(2,1)$, deoarece $(2,1) \circ (2012, -2013) = (4024, -4025)$, iar $(2012, -2013) \circ (2,1) = (4024, -1)$ 1p

3. Fie funcțiile $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definite astfel: $f_1(x) = x$ iar $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt$, $n \geq 1$.

a) Demonstrați că $f_3(x) = \frac{x^3}{6}$.

b) Utilizând metoda inducției matematice, să se arate că $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, pentru orice număr natural nenul n .

Soluție:

a) Obține $f_2(x) = \int_0^x t dt = \frac{x^2}{2}$ 2p

Finalizare: $f_3(x) = \int_0^x f_2(t) dt = \int_0^x \frac{t^2}{2} dt = \frac{x^3}{6}$ 2p

b) Verificare: $P(1) : f_1(x) = x$ este adevărată 1p

Presupunând $P(k) : f_k(x) = \frac{x^k}{k!}$ adevărată, vom demonstra că și $P(k+1) : f_{k+1}(x) = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ este adevărată.

Pentru aceasta: $f_{k+1}(x) = \int_0^x f_k(t) dt = \int_0^x \frac{t^k}{k!} dt = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ 2p

4. a) Determinați soluțiile ecuației $x^3 = x$, în inelul $(Z_4, +, \cdot)$.

b) Numim "potrivită" o tripletă de tipul $\begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} & \hat{c} \end{pmatrix}$ cu $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in Z_4$ și $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = \hat{0}$. Determinați tripletele "potrivite" de tipul $\begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} & \hat{2} \end{pmatrix}$.

c) Câte triplete "potrivite" există ?

Soluție:

Analizând cazurile posibile se constată că $\hat{0}, \hat{1}, \hat{3}$ sunt soluții 3p

b) Tripletele "potrivite" de tipul $\begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} & \hat{2} \end{pmatrix}$ sunt: $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{3} & \hat{2} \end{pmatrix}$.. 2p

c) Tripletele "potrivite" sunt: $\begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} & \hat{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{3} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} & \hat{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{3} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} & \hat{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{3} & \hat{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{1} & \hat{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{2} & \hat{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{3} & \hat{2} \end{pmatrix}$ 2p