Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galaţi
16 februarie 2013
Clasa a VII-a

Problema 1. Fie numerele

$a=\sqrt{176}-\sqrt{288}+\sqrt{4032}$;

$b=-\sqrt{275}+\sqrt{450}-\sqrt{6300}$;

$$c=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{\sqrt{45}}+\frac{\sqrt{13}-\sqrt{9}}{\sqrt{117}}+\frac{\sqrt{17}-\sqrt{13}}{\sqrt{221}}+\frac{\sqrt{21}-\sqrt{17}}{\sqrt{357}}+\frac{\sqrt{25}-\sqrt{21}}{\sqrt{525}}.$$

Să se demonstreze că $c+a:b\in\mathbb{N}$.

Visilina Guiţă, profesor, Galaţi

Problema 2. Fie trapezul $ABCD$ cu $AD\parallel BC, m(\measuredangle A)=90^\circ$ şi $AC\cap BD=\{O\}$. Paralela prin punctul O la AD intersectează pe (AB) în punctul E şi pe (DC) în punctul F. Să se demonstreze că:

a). $\triangle AED\sim\triangle BEC$.

b). $[EO$ este bisectoarea unghiului $\measuredangle DEC$.

c). $[EO]\equiv[OF]$.

Problemă selectată de

Visilina Guiţă, profesor, Galaţi

Problema 3

a). Să se indice un număr natural nenul n pentru care numărul $\sqrt{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n+1}$ este raţional.

b). Să se justifice că numărul $\sqrt{1+3+5+\ldots+2013}$ este număr natural.

c). Numărul $\sqrt{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2013+1994}$ este număr natural?(Justificare).

Constantin Ursu, profesor, Galaţi

Problema 4. În triunghiul ABC, $m(\measuredangle ABC)=2\cdot m(\measuredangle ACB)$ şi $AD\perp BC, D\in BC$. Punctele E şi C sunt situate de o parte şi de alta a dreptei AB astfel încât $AE\perp BE$ şi $\measuredangle EAB\equiv\measuredangle ACB$. Bisectoarea unghiului $\measuredangle AED$ intersectează dreapta AC în M. Dacă $\{H\}=AE\cap BC$, arătaţi că:

a). Triunghiurile BHA şi AHC sunt isoscele.
b). Patrulaterul MCDE este paralelogram.
c). Perimetrul paralelogramului MCDE este egal cu perimetrul triunghiului ABC.

Problemă selectată de
Visilina Guiţă, profesor, Galaţi
din G.M.nr.10, 2012

Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galaţi
16 februarie 2013

Clasa a VIII-a

Problema 1. Să se demonstreze că:

a) $\sqrt{11+6\cdot\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}\in\mathbb{N}$.

b) $\frac{1}{2\cdot\sqrt{1}+1\cdot\sqrt{2}}+\frac{1}{3\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}}+...+\frac{1}{100\cdot\sqrt{99}+99\cdot\sqrt{100}}<\frac{19}{20}$.

c) $\sqrt{x^2-8\cdot x+25}+\sqrt{4\cdot x^2+12\cdot x+25}>7$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Romeo Zamfir, profesor, Galaţi

Problema 2. Se consideră rombul $ABCD$ cu $AB=8\text{cm}$ şi $m(\sphericalangle A)=60^\circ$. Pe planul rombului $ABCD$, în punctul A, se ridică perpendiculara MA cu $MA=6\text{cm}$.

a) Să se calculeze distanţa dintre punctele M şi D.

b) Să se calculeze distanţa de la A la planul (MBD).

c) Să se calculeze distanţa de la M la dreapta BC.

Romeo Zamfir, profesor, Galaţi

Problema 3. Fie $a,\ b>0$. Să se demonstreze inegalităţile:

a). $(a^3+1)\cdot(b^3+1)\geq(a^2\cdot b+1)\cdot(b^2\cdot a+1)$.

b). $a^3\cdot b^3+1\geq a\cdot b\cdot(a+b)$, pentru $a,b\geq1$ sau $a,b\leq1$.

Vasile Popa, profesor, Galaţi

Problema 4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ o prismă patrulateră dreaptă, cu bazele pătrate, în care $AA'=AB\cdot\sqrt{2}$ şi M, N, O sunt, respectiv, mijloacele segmentelor $[BB']$, $[DD']$, $[BD]$.

a). Să se demonstreze că $A'B\perp(AMD)$.

b). Dacă $\{G\}=A'O\cap(AMN)$, să se demonstreze că punctul G este centrul de greutate atât pentru triunghiul AMN cât şi pentru triunghiul $A'BD$.

c). Să se demonstreze că dreapta de intersecţie a planelor (AMD) şi (ANB) este perpendiculară pe planul $(A'BD)$.

Problemă selectată de
Ioana Lefteriu, profesor, Galaţi
G.M.nr.10, 2012

Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galaţi
16 februarie 2016

Clasa a IX-a

Problema 1. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$\left[\frac{x-1}{2}\right]+\left[\frac{x+1}{2}\right]+\left[\frac{x+3}{2}\right]=\left[\frac{x+7}{3}\right]+\left[\frac{x+4}{3}\right]+\left[\frac{x+1}{3}\right].$$

Problemă prelucrată de

Viorica Bujor, profesor, Galaţi

Problema 2. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_1=\frac{1}{3}$, $a_2=\frac{5}{6}$ şi $(n+1)\cdot a_{n+1}=(n-1)\cdot a_n$, $(\forall)n\in\mathbb{N}, n\geq 2$.

Să se demonstreze că $a_1+a_2+a_3+...+a_n<2, (\forall)n\geq 1$.

Problemă selectată de

Viorica Bujor,profesor, Galaţi
din G.M.nr. 6-7-8, 2012

Problema 3. Fie numărul natural $a=\underbrace{111...11}_{(n-1)cifre}0\underbrace{222...22}_{n\ cifre}+x$, unde $x\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Să se determine $x\in\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, ştiind că numărul a este pătrat perfect.

Ioan Toderiţă, profesor, Galaţi

Problema 4. În triunghiul ABC cu $BC=4$, $CA=6$, $AB=3$, notăm centrul de greutate cu G, iar centrul cercului înscris în triunghi cu I. Dacă $GI\cap AB=\{M\}$ şi $GI\cap AC=\{N\}$, să se calculeze valoarea rapoartelor $\frac{MB}{MA}$, $\frac{NC}{NA}$.

Iuliana Duma, profesor, Galaţi

Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galaţi
16 februarie 2013

Clasa a X-a

Problema 1.

a). Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(11+6\sqrt{2}\right)^x = 6\cdot\left(3+\sqrt{2}\right)^x - 7$.

b). Să se determine numerele naturale n pentru care are loc egalitatea:

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2.$$

Problemă selectată de
Viorica Bujor, profesor, Galaţi

Problema 2. Fie $z_A, z_B \in \mathbb{C}$, afixele punctelor A respectiv B, de forma:

$z_A = a+b\cdot i,\ z_B = b+a\cdot i,\ a,b\in\mathbb{R}^*,\ b<a$.

a). Să se determine o relaţie între a şi b, astfel ca triunghiul AOB să fie echilateral. Să se determine triunghiurile echilaterale OAB cu aria $\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

b). În condiţia $0<b<a$, pe latura AB a triunghiului echilateral OAB se construiesc pătratele $ABCD,\ ABC'D'$. Să se calculeze afixele punctelor $C,\ D,\ C',\ D'$ în funcţie de b.

Ioan Toderiţă, profesor, Galaţi

Problema 3. Fie numerele reale $a,b,x_1,\ x_2,\ x_3,\dots,x_n \in (0,1)$ astfel încât $b^n \le x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots\cdot x_n$. Să se demonstreze că $\left(\log_a b\right)^n \ge \log_a x_1\cdot\log_a x_2\cdot\log_a x_3\cdot\ldots\cdot\log_a x_n$.

Problemă selectată de

Viorica Bujor, profesor, Galaţi

din G.M.nr.11,2012

Problema 4. Să se demonstreze că nu există nicio funcţie $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ care verifică simultan proprietăţile:

a). $f(x+y)+f(x\cdot y^2) = f(x)\cdot f(y^3)+1,\ (\forall)x,y\in\mathbb{Z}$

b). $f(1)=2$.

Constantin Ursu, profesor, Galaţi

Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galaţi
16 februarie 2013

Clasa a XI-a

Problema 1.

Fie $E(x,k)=\begin{vmatrix} \sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{k} \\ \sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x} \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{k} & \sqrt[3]{x} & \sqrt[3]{k} \end{vmatrix}$, $x,\ k\in\mathbb{R}$,

a) Să se calculeze $E(-k,\ k)$ şi $E(\sin^2\alpha,\ \cos^2\alpha)$, $\alpha\in\mathbf{R}$.

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\sum_{k=1}^{2013} E(x,k)\geq 0$.

Milu Cârmaciu, profesor, Galaţi

Problema 2.

a) Să se calculeze E(k) = $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[k]{x}-\sqrt[k+2]{x}}{\sqrt[k+1]{x}-\sqrt[k+3]{x}}$, $k\geq 2$, $k\in\mathbf{N}$.

b) Fie $P=\prod_{k=2}^{2n+1} E(k)$. Să se demonstreze că $P\in \mathrm{N}, (\forall) n\in \mathrm{N}^*$.

Milu Cârmaciu, profesor, Galaţi

Problema 3. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir mărginit de numere reale pozitive cu proprietatea că $\sqrt{n\cdot x_n+n+1}-\sqrt{n\cdot x_n+1}\leq\frac{\sqrt{n}}{2}\leq\sqrt{n\cdot x_n+n}-\sqrt{n\cdot x_n}, (\forall) n\geq 1$. Să se demonstreze că şirul este convergent.

Problemă selectată de
Vasile Popa, profesor, Galaţi
din G.M.nr.11,2012

Problema 4. Fie A şi B două matrice pătratice de ordinul doi cu elemente numere complexe, cu proprietatea $A\cdot B-B\cdot A=A$. Să se arate că $A\cdot B^n\cdot A=O_2, (\forall) n\in\mathbb{N}, n\geq 1$.

Problemă selectată de
Vasile Popa, profesor, Galaţi
din G.M.nr.11,2012

Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galaţi
16 februarie 2013

Clasa a XII-a

Problema 1.

a) Să se determine $a,\ b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$F(x)=(a\cdot x+1)\cdot e^{b\cdot x+2}$ să fie o primitivă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^{2\cdot x+2}\cdot(4\cdot x+4)$.

b) Să se calculeze $\int\sqrt{4-x^2}\,dx,\quad x\in[-2;2]$.

Romeo Zamfir, profesor, Galaţi

Problema 2. Se notează $E=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ şi pentru orice $t\in\mathbb{R}$ se consideră $f_t:E\to E$,

$f_t(x,y)=\left(x+t\cdot y+\dfrac{t^2}{2},\ y+t\right)$, pentru orice $(x;y)\in E$. Considerând mulţimea

$G=\{f_t\,|\,t\in\mathbb{R}\}$, să se demonstreze că :

a) G are o structură de grup comutativ în raport cu operaţia de compunere a funcţiilor.

b) G este izomorf cu grupul $(\mathbb{R},+)$.

Romeo Zamfir, profesor, Galaţi

Problema 3. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, derivabilă, cu derivata continuă pe $\mathbb{R}$ care satisface proprietatea $f'(x)-f(x)=x^2+x+1,(\forall)x\in\mathbb{R}$.

a). Să se determine funcţia f pentru $f(0)=0$.

b). Să se demonstreze că $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{e^x}=4$.

Ioan Toderiţă, profesor, Galaţi

Problema 4. Fie p un număr prim de forma $4\cdot k+3,\ k\in\mathbb{N}$.

a). Să se arate că ecuaţia $x^2+\hat{1}=\hat{0}$ nu are soluţii în $\mathbb{Z}_p$.

b). Să se arate că dacă $x^2+y^2=\hat{0}, x, y\in\mathbb{Z}_p$, atunci $x=\hat{0}$ şi y=$\hat{0}$.

c). Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuaţia $x^2+y^2=12005$.

Vasile Popa, profesor, Galaţi