CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
“VICTOR VÂLCOVICI”
EDIȚIA a XXI-a , BRĂILA, 11.05.2013

SOLUȚII

CLASA A IX-A

1. Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ verifică următoarele condiții:

(i) $\left|f(a)-f(b)\right|\le|a-b|$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$;

(ii) $f\left(f\left(f(0)\right)\right)=0$.

Calculați $f(0)$.

***

Soluție. Din

$$\left|f(0)\right|=\left|f(0)-0\right|\ge\left|f\left(f(0)\right)-f(0)\right|\ge\left|f\left(f\left(f(0)\right)\right)-f\left(f(0)\right)\right|=\left|f\left(f(0)\right)\right|$$

și

$$\left|f\left(f(0)\right)\right|=\left|f\left(f(0)\right)-0\right|\ge\left|f\left(f\left(f(0)\right)\right)-f(0)\right|=\left|f(0)\right|,$$

avem

$$\left|f(0)\right|=\left|f\left(f(0)\right)\right|.$$

Astfel, apar cazurile:

I. dacă $f(0)=f\left(f(0)\right)$, atunci

$$f(0)=f\left(f(0)\right)=f\left(f\left(f(0)\right)\right)=0;$$

II. dacă $f(0)=-f\left(f(0)\right)$, atunci

$$\left|f(0)\right|=\left|f(0)-0\right|\ge\left|f\left(f(0)\right)-f(0)\right|=2\left|f(0)\right|\Rightarrow f(0)=0.$$

În ambele cazuri am obținut $f(0)=0$.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"VICTOR VÂLCOVICI"
EDIȚIA a XXI-a , BRĂILA, 11.05.2013

SOLUȚII

CLASA A IX-A

2. Demonstrați că, oricare ar fi $x, y, z \in [0,1]$, are loc inegalitatea:

$$\frac{x+y}{13+y^5+z^5}+\frac{y+z}{13+z^5+x^5}+\frac{z+x}{13+x^5+y^5}\leq\frac{2}{5}.$$

Marius Damian, Brăila

Soluție. Ținând cont că $x, y, z \in [0,1]$, avem

$$\sum_{cyc}\frac{x+y}{13+y^5+z^5}=\sum_{cyc}\frac{x+y}{12+1+y^5+z^5}\leq\sum_{cyc}\frac{x+y}{12+x^5+y^5+z^5}=\frac{2(x+y+z)}{12+x^5+y^5+z^5}.$$

Prin urmare, este suficient să arătăm că

$$\frac{2(x+y+z)}{12+x^5+y^5+z^5}\leq\frac{2}{5},$$

scrisă echivalent

$$12+x^5+y^5+z^5\geq 5x+5y+5z. \quad (1)$$

Aplicând inegalitatea MA-MG, avem

$$x^5+4=x^5+1+1+1+1\geq 5\sqrt[5]{x^5\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1}=5x,$$

deci

$$x^5+4\geq 5x.$$

Au loc și inegalitățile analoage

$$y^5+4\geq 5y,\quad z^5+4\geq 5z.$$

Prin însumarea ultimelor trei inegalități, se obține inegalitatea (1).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=y=z=1$.

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"VICTOR VÂLCOVICI"
EDIȚIA a XXI-a , BRĂILA, 11.05.2013

SOLUȚII

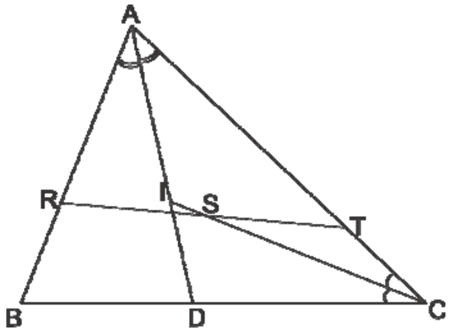
CLASA A IX-A

3. Fie triunghiul ABC în care $AB \neq AC,$ iar I este centrul cercului înscris în triunghi. Punctele R și T se află pe segmentele (AB) și respectiv (AC) astfel încât $BR = CT = x,$ iar S este mijlocul segmentului (RT).

Să se arate că punctele C, S, I sunt coliniare dacă și numai dacă $x = \dfrac{ac}{2p},$ unde notațiile sunt cele cunoscute.

Enache Pătrașcu, Focșani

Soluție. Exprimăm vectorii $\overrightarrow{CS}$ și $\overrightarrow{CI}$ în baza $\left\{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right\}$.



Mai întâi,

$$\overrightarrow{CS} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{CT}+\overrightarrow{CR}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{CT}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BR}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{b}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\frac{x}{c}\cdot\overrightarrow{BA}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x}{b}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\frac{x}{c}\cdot\left(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\right)\right] = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{b}+\frac{x}{c}\right)\cdot\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{x}{c}\right)\cdot\overrightarrow{CB}.$$

Apoi, folosind teorema bisectoarei și formula vectorului de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat, avem

$$\overrightarrow{CI} = \frac{1}{1+\dfrac{b+c}{a}}\cdot\left(\overrightarrow{CA}+\frac{b+c}{a}\cdot\overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{a+b+c}\cdot\left(a\cdot\overrightarrow{CA}+b\cdot\overrightarrow{CB}\right).$$

În final,

$$C, S, I \text{ sunt coliniare} \Leftrightarrow \overrightarrow{CS}, \overrightarrow{CI} \text{ sunt coliniari} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{b}+\frac{x}{c}\right)}{\frac{a}{a+b+c}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{x}{c}\right)}{\frac{b}{a+b+c}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{ac}{a+b+c} \Leftrightarrow x = \frac{ac}{2p}.$$