CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"VICTOR VÂLCOVICI"
EDIȚIA a XXI-a , BRĂILA, 11.05.2013

SOLUȚII

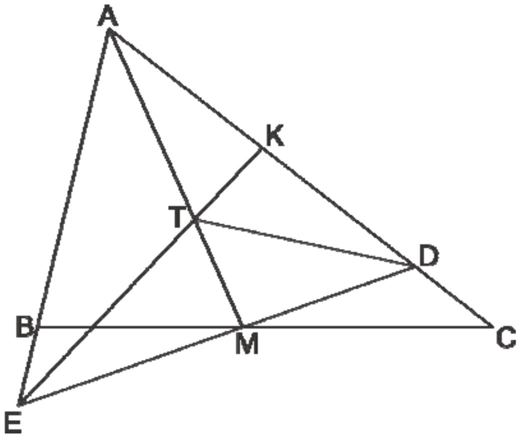
CLASA A VII-A

1. Se consideră ΔABC cu $AC=b,\ AB=c,\ c<b$ și punctele $E\in(AB,\ D\in(AC$ astfel încât $AE=AD=\dfrac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$. Notăm cu K mijlocul segmentului (AD), $BC\cap ED=\{M\}$ și $AM\cap EK=\{T\}$.

Aflați valoarea raportului $\dfrac{\text{aria}(\Delta ETD)}{\text{aria}(\Delta TAD)}$.

Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila

Soluție. Mai întâi, $c<\dfrac{2bc}{b+c}<b.$



Din teorema lui Menelaus în ΔABC, cu secanta EMD, avem

$$\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CD}{AD}\cdot\frac{AE}{BE}=1. \quad (1)$$

Ținând cont că $AD=AE$, din (1) rezultă

$$\frac{BM}{MC}=\frac{BE}{CD}=\frac{\frac{2bc}{b+c}-c}{b-\frac{2bc}{b+c}}=\frac{c}{b}=\frac{AB}{AC},$$

de unde rezultă că $[AM$ este bisectoarea unghiului BAC.

Dar cum $AE=AD$, rezultă că M este mijlocul segmentului (ED), deci T este centrul de greutate al triunghiului AED. Rezultă astfel că

$$\frac{\text{aria}(\Delta ETD)}{\text{aria}(\Delta TAD)}=1.$$

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"VICTOR VÂLCOVICI"
EDIȚIA a XXI-a , BRĂILA, 11.05.2013

SOLUȚII

CLASA A VII-A

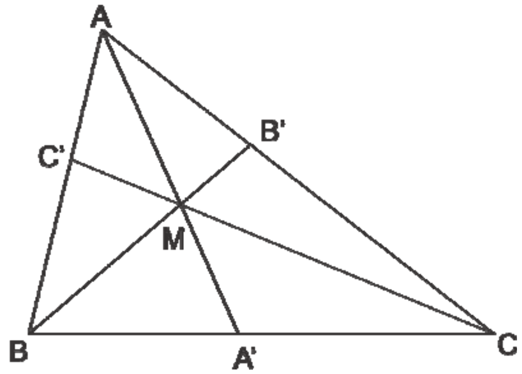
2. Se consideră ΔABC și punctele $A'\in(BC)$, $B'\in(AC)$ și $AA'\cap BB'=\{M\}$. Fie $\{C'\}=CM\cap AB.$

Calculați $\frac{MA}{MA'}\cdot\frac{MB}{MB'}\cdot\frac{MC}{MC'}-\frac{MA}{MA'}-\frac{MB}{MB'}-\frac{MC}{MC'}.$

Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila

Soluție. Notăm $\frac{BA'}{BC}=x,\quad \frac{B'C}{AC}=y,\quad \frac{C'A}{AB}=z$ și obținem

$$CA'=(1-x)a,\ AB'=(1-y)b,\ BC'=(1-z)c.$$



Din teorema lui Ceva în ΔABC, rezultă

$$\frac{x\cdot a}{(1-x)\cdot a}\cdot\frac{y\cdot b}{(1-y)\cdot b}\cdot\frac{z\cdot c}{(1-z)\cdot c}=1\Rightarrow xyz=(1-x)(1-y)(1-z).$$

Aplicând teorema lui Menelaus în $\Delta AA'C$, cu secanta BMB', rezultă

$$\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{BC}{BA'}\cdot\frac{MA'}{MA}=1\Rightarrow\frac{MA}{MA'}=\frac{AB'}{B'C}\cdot\frac{BC}{BA'}=\frac{(1-y)b}{yb}\cdot\frac{a}{xa}\Rightarrow\frac{MA}{MA'}=\frac{1-y}{xy}$$

și analoagele:

$$\frac{MB}{MB'}=\frac{1-z}{yz},\ \frac{MC}{MC'}=\frac{1-x}{zx}.$$

Avem acum

$$\frac{MA}{MA'}\cdot\frac{MB}{MB'}\cdot\frac{MC}{MC'}-\frac{MA}{MA'}-\frac{MB}{MB'}-\frac{MC}{MC'}=\frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{x^2y^2z^2}-\frac{1-x}{xy}-\frac{1-y}{yz}-\frac{1-z}{zx}=$$

$$=\frac{1}{xyz}-\frac{x+y+z-xy-yz-zx}{xyz}=\frac{(1-x)-y(1-x)-z(1-x)+yz(1-x)+xyz}{xyz}=.$$

$$=\frac{(1-x)(1-y)(1-z)}{xyz}+1=1+1=2.$$

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
"VICTOR VÂLCOVICI"
EDIȚIA a XXI-a , BRĂILA, 11.05.2013

SOLUȚII

CLASA A VII-A

3. Demonstrați că printre 2025 numere naturale distincte, există 729 numere a căror sumă este divizibilă cu 9.

Carmen Botea și Viorel Botea, Brăila

Soluție. Mai întâi, arătăm că oricum am alege 5 numere naturale, există 3 dintre ele cu suma divizibilă cu 3.

Cele 5 numere pot fi de forma $\mathrm{M}_3,\ \mathrm{M}_3+1,\ \mathrm{M}_3-1$. Atunci:

- dacă există câte un număr de fiecare formă de mai sus, atunci suma lor se divide cu 3;
- dacă nu, există trei numere care dau același rest prin împărțirea la 3, deci suma lor se divide cu 3.

Acum, arătăm că oricum am alege 25 de numere naturale, fie acestea $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_{25}$, există printre ele 9 cu suma divizibilă cu 9.

Formăm 5 grupe de câte 5 numere:

$$\{a_1, ..., a_5\},\ \{a_6, ..., a_{10}\},\ \{a_{11}, ..., a_{15}\},\ \{a_{16}, ..., a_{20}\},\ \{a_{21}, ..., a_{25}\}.$$

Conform raționamentului de mai sus, în fiecare grupă există câte 3 numere a căror sumă se divide cu 3, adică

$$a_{i_1}+a_{i_2}+a_{i_3}=3k_1,\ a_{i_4}+a_{i_5}+a_{i_6}=3k_2,\ a_{i_7}+a_{i_8}+a_{i_9}=3k_3,$$
$$a_{i_{10}}+a_{i_{11}}+a_{i_{12}}=3k_4,\ a_{i_{13}}+a_{i_{14}}+a_{i_{15}}=3k_5.$$

Dintre numerele k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, există 3 a căror sumă se divide cu 3. Dacă, de exemplu, $(k_1+k_2+k_3) \vdots 3$, atunci

$$a_{i_1}+a_{i_2}+a_{i_3}+a_{i_4}+a_{i_5}+a_{i_6}+a_{i_7}+a_{i_8}+a_{i_9}=3(k_1+k_2+k_3) \vdots 9.$$

Avem $2025=25 \cdot 81$ și cum din fiecare grupă de 25 de numere există 9 cu suma divizibilă cu 9, rezultă că din cele 2025 de numere, există $9 \cdot 81=729$ numere a căror sumă se divide cu 9.