CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„VICTOR VÂLCOVICI"
Ediţia a XXI-a, Brăila,
11.05.2013

SOLUŢII

Clasa a VIII a

1. Aflaţi x şi y numere întregi care verifică ecuaţia:

$$\sqrt{x^2-32}+\sqrt{61-x^2}+\sqrt{37-y^2}=\sqrt{4x^2+4xy+y^2}.$$

Adela Dimov, profesor, Brăila

Soluţie: Condiţiile de existenţă a radicalilor implică $x^2\in[32,61]$ şi $y^2\le 37$.

Deoarece $x,y\in\mathbb{Z}\Rightarrow x^2\in\{36,49\}$ şi $y^2\in\{0,1,4,9,16,25,36\}$.

Mai trebuie ţinut cont de faptul că $\sqrt{4x^2+4xy+y^2}=|2x+y|\in\mathbb{N}$. (1p)

1) Dacă $x^2=36\Rightarrow x=\pm 6$.

a) $x=6\Rightarrow 7+\sqrt{37-y^2}=|12+y|$. Cum $y\in[-6,6]\cap\mathbb{Z}\Rightarrow|12+y|=12+y$.

Ecuaţia devine $\sqrt{37-y^2}=y+5$ şi se impune condiţia $y+5\ge 0\Rightarrow y\ge -5$.

Obţinem soluţia $\mathrm{y}=1$. (2p)

b) Dacă $x=-6\Rightarrow 7+\sqrt{37-y^2}=|-12+y|$.

Cum $y\in[-6,6]\cap\mathbb{Z}\Rightarrow|-12+y|=12-y$.

Ecuaţia devine $\sqrt{37-y^2}=5-y\Rightarrow 5-y\ge 0$.

Obţinem soluţia $\mathrm{y}=-1$. (2p)

2) Dacă $x^2=49\Rightarrow\sqrt{17}+\sqrt{12}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ şi nu există $y\in\mathbb{Z}$ cu $y^2\in\{0,1,4,9,16,25,36\}$ şi care să verifice ecuaţia problemei. (2p)

Deci rămân soluţiile: $x_1=6,\ \mathrm{y}_1=1$ şi $x_2=-6,\ \mathrm{y}_2=-1$.

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„VICTOR VÂLCOVICI”
Ediţia a XXI-a, Brăila,
11.05.2013

SOLUŢII

Clasa a VIII a

2. Arătaţi că nu există numere naturale x şi y astfel încât

$$\left(x^4+y^4-x^2y^2\right)\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)=2\cdot 4^{1006}.$$

Artur Bălăucă, profesor, Iaşi

Soluţie: Presupunem prin absurd ca exista $x_0, y_0 \in \mathbb{N}$ astfel incat

$$\left(x_0^4+y_0^4-x_0^2y_0^2\right)\left(x_0^4+y_0^4+x_0^2y_0^2\right)=2^{2013}$$

Fie d= (x_0 , y_0). Deci exista $m,n \in \mathbb{N}$ astfel incat avem x_0 = d $\cdot$ m si y_0= d $\cdot$ n cu (m, n)=1 (1p) **(1)**

Avem $\left(x_0^4+y_0^4-x_0^2y_0^2\right)\left(x_0^4+y_0^4+x_0^2y_0^2\right)=\left(x_0^4+y_0^4\right)^2-x_0^4y_0^4=x_0^8+y_0^8+x_0^4y_0^4=2^{2013}$ (1p) **(2)**

Din **(1)** si **(2)** rezulta ca $d^8\left(m^8+n^8+m^4n^4\right)=2^{2013}$, de unde $d^8 / 2^{2013}$, adica $d^8=2^{8p}$ cu $p \in \mathbb{N}$, $p \le 251$. (1 p)

Deci $m^8+n^8+m^4n^4=2^{2013-8p}$ si $2 / m^8+n^8+m^4n^4$ (1 p) **(3)**

Insa din (m,n) = 1 rezulta ca m si n au paritati diferite. (1 p)

Daca m = 2k si n = 2q+1 , unde $k,q \in \mathbb{N}$, atunci $m^8+n^8+m^4n^4=M_2+1$, in contradictie cu relatia **(3)** (1 p)

Analog, m = 2a+1 si n = 2b, unde $a,b \in \mathbb{N}$ conduc la aceeasi concluzie. (1 p)

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
„VICTOR VÂLCOVICI”
Ediţia a XXI-a, Brăila,
11.05.2013

SOLUŢII

Clasa a VIII a

3. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ se consideră punctele E şi F pe dreptele AA', respectiv, DD'. Determinaţi intersecţia planelor (EFB) şi (ABC), în cazurile:

a) $E \in (AA'$ şi $F \in (DD'$;

b) $E \in (AA'$ şi $F \notin [DD'$.

Constantin Apostol, profesor, Rm. Sărat

Soluţie:

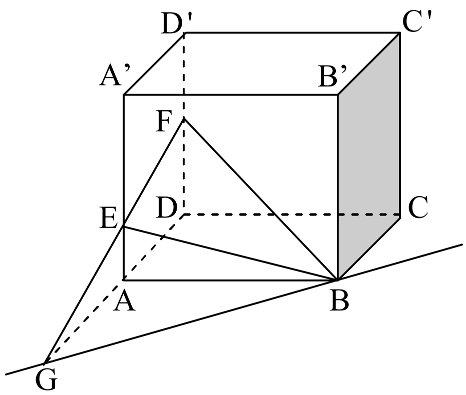

fig. 1

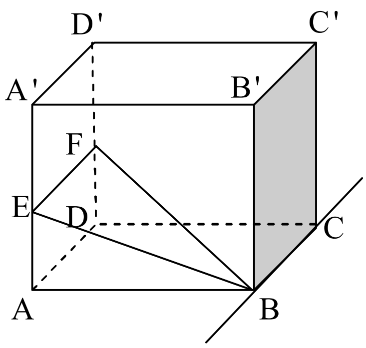

fig. 2

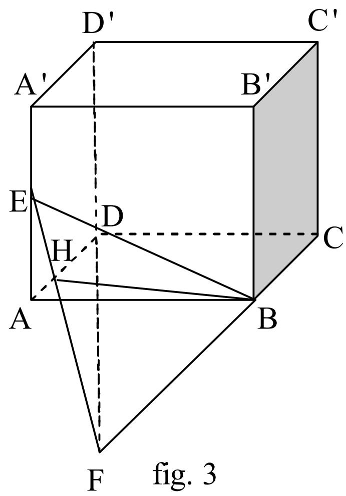

fig. 3

a) Vom deosebi subcazurile:

I) Dreptele EF şi AD nu sunt paralele; ele au, deci, un punct de intersecţie, fie acesta, G ; deducem că intersecţia planelor (EFB) şi (ABC) este dreapta GB (fig. 1) (2p)

II) Dreptele EF şi AD sunt paralele; rezultă, deci, că şi dreptele EF şi BC sunt paralele; deducem că intersecţia planelor (EFB) şi (ABC) este dreapta BC. (2p)

b) În acest caz, dreapta EF intersectează segmentul (AD) într-un punct, fie acesta, H ; deducem că intersecţia planelor (EFB) şi (ABC) este dreapta HB. (3p)