1. Sa se determine numerele reale x si y care verifica egalitatea:

$$14\left[(x+y)^2+16x^2+16\log_2^2 y\right]=(9x+y+12\log_2 y)^2.$$

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Solutie

Egalitatea din enunt se mai poate scrie:

$\left(1^2+2^2+3^2\right)\left[(x+y)^2+(4x)^2+(4\log_2 y)^2\right]=\left[1(x+y)+2\cdot 4x+3\cdot 4\log_2 y\right]^2$ si conform inegalitatii

C – B – S egalitatea are loc daca si numai daca

$\frac{x+y}{1}=\frac{4x}{2}=\frac{4\log_2 y}{3}\Leftrightarrow x+y=2x=\frac{4}{3}\log_2 y\Rightarrow x=y$

si $x=\frac{2}{3}\log_2 y\Rightarrow x>0,\ y>0$ si $3x=2\log_2 x\Leftrightarrow 3x=\log_2 x^2\Leftrightarrow 2^{3x}=x^2\Leftrightarrow 8^x=x^2$. Vom demonstra ca $8^x>x^2,\forall x>0$. Notam $[x]=n\in\mathbb{N}\Rightarrow n\le x<n+1\Rightarrow 8^n\le 8^x<8^{n+1}$ si $n^2\le x^2<(n+1)^2$.

Vom demonstra prin inductie matematica $P(n):8^n\ge(n+1)^2$

$P(0):8^0\ge 1$ adevarat.

Presupunem P(n) adevarata si vom demonstra ca P (n+1) este adevarata.

$P(n+1):8^{n+1}\ge(n+2)^2$

Dar $8^n\ge(n+1)^2\Rightarrow 8^{n+1}\ge 8(n+1)^2=8n^2+16n+8\ge n^2+4n+4\Rightarrow 8^{n+1}\ge(n+2)^2$ si conform metodei inductiei matematice P (n) este adevarata, $\forall n\ge 0$.

Avem $8^x\ge 8^n\ge(n+1)^2>x^2\Rightarrow$ ecuatia $8^x=x^2$ nu are solutii x > 0, adica nu exista x si y sa verifice egalitatea din enunt.

2. Fie $z_k \in \mathbb{C}^*, |z_k| = r,$ $(\forall)$ k $\in \{1,2,3\ldots 2013\}$. Notam cu $P = z_1 z_2 ... z_{2013}$.
Sa se arate ca daca $z_k + \frac{P}{z_k} \in \mathbb{R},$ $(\forall)$ k $\in \{1,2,3\ldots 2013\}$, atunci $P = 1.$

Cornel Noană și Enache Pătrașcu, profesori, Focșani

Soluţie

2013 = n

$$z_1 + \frac{P}{z_1} = \overline{z_1} + \frac{\overline{P}}{\overline{z_1}} \Rightarrow z_1 + \frac{P}{z_1} = \frac{r^2}{z_1} + \frac{r^{2n-2}}{z_2 \ldots z_n} = \frac{r^2 z_2 \ldots z_n + r^{2n-2} z_1}{P}$$

$$\frac{r^2}{P} = \frac{z_1 + z_2 \ldots z_n}{z_2 \ldots z_n + r^{2n-2} z_1} \overset{\text{analog}}{=} \frac{z_2 + z_1 z_3 \ldots z_n}{z_1 z_3 \ldots z_n + r^{2n-2} z_2} = \frac{(z_1 - z_2)(1 - z_3 \ldots z_n)}{(z_1 - z_2)(r^{2n-2} - z_3 \ldots z_n)} \overset{\text{analog}}{=} \frac{1 - z_1 z_4 \ldots z_n}{r^{2n-2} - z_1 z_4 \ldots z_n} =$$

$$= \frac{(z_1 - z_3) z_4 \ldots z_n}{(z_1 - z_3) z_4 \ldots z_n} = 1 \Rightarrow P = r^2 \Rightarrow z_1 + \frac{r^2}{z_1} = \frac{r^2}{z_1} + \frac{z_1 r^{2n-2}}{r^2} \Rightarrow r^2 = 1 \Rightarrow P = 1$$

3. Lotul de elevi care reprezinta o scoala la concursurile de matematica este format din *n* elevi care se deplaseaza la diversele concursuri la care sunt invitati. Intr-o zi scoala lor primeste invitatie la doua concursuri de matematica situate in localitati diferite. Avand in vedere ca participarea la un concurs nu este obligatorie, ca numarul elevilor participanti nu este limitat de catre organizatori si ca nu este obligatoriu ca toti cei *n* elevi sa participe, se cere:

a) Sa se determine in cate moduri se pot organiza delegatiile de elevi la cele doua concursuri.

b) Daca in scoala sunt 2 profesori care insotesc elevii la concursuri, in cate moduri se pot constitui

delegatiile de elevi si profesori daca la un concurs la care merg elevi merge si cel putin un professor? (profesorii nu se deplaseaza la un concurs la care nu merg elevi)

Gabriel Andrei, profesor, Bacau

Solutie: a) Problema se reduce la o problema cunoscuta si anume: "Sa se determine $card\{(X,Y),\ X,Y \subseteq M,\ X \cap Y = \emptyset\}$ unde $cardM = n$" A carei solutie este:

Daca $X = \emptyset$ atunci $Y \subseteq M$ si avem $C_n^0 2^n$ posibilitati,

Daca $X = \{a\}$ atunci $Y \subseteq M - \{a\}$ si avem $C_n^1 2^{n-1}$ posibilitati,

Daca $X = \{a, b\}$ atunci $Y \subseteq M - \{a, b\}$si avem $C_n^2 2^{n-2}$ posibilitati,

....

Daca $X = M$ atunci $Y \subseteq M - M$ si avem $C_n^n 2^0$ posibilitati.

Prin urmare avem: $C_n^0 2^n + C_n^1 2^{n-1} + C_n^{n-2} 2^{n-2} + \cdots + C_n^n 2^0 = (1+2)^n = 3^n$ delegatii.

b) In contextul in care am introdus si profesorii in delegatii vom avea urmatoarele situatii:

1) Daca merg elevi la ambele concursuri pentru fiecare delegatie de elevi avem 2 variante un profesor merge cu un grup cu celalalt sau invers.
2) Daca elevii merg doar la un concurs avem 3 variante un profesor, celalalt sau amandoi.
3) Daca nu se merge la nici un concurs ramane o singura varianta.

Asadar:

Daca $X = \emptyset$ atunci $Y \subseteq M$ si avem $3C_n^0 2^n - 2$ posibilitati,

Daca $X = \{a\}$ atunci $Y \subseteq M - \{a\}$ si avem $2C_n^1 2^{n-1} + C_n^1$ posibilitati,

Daca $X = \{a, b\}$ atunci $Y \subseteq M - \{a, b\}$si avem $2C_n^2 2^{n-2} + C_n^2$ posibilitati,

....

Daca $X = M$ atunci $Y \subseteq M - M$ si avem $2C_n^n 2^0 + C_n^n$ posibilitati.

Si $2(C_n^0 2^n + C_n^1 2^{n-1} + C_n^{n-2} 2^{n-2} + \cdots + C_n^n 2^0) + 2^n + 2^n - 1 - 2 = 2 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n - 3$