Clasa a XI a

1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale strict pozitive, cu proprietatea că $a_1^x + a_2^x + ... + a_n^x \geq n^{x+1}$, oricare ar fi $n \in N^*$ şi oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n > \ln(n^n + 1)$, oricare ar fi $n \in N^*$.

Carmen Botea si Viorel Botea, Brăila

Solutie. $\left(\frac{a_1}{n}\right)^x + ... + \left(\frac{a_n}{n}\right)^x \geq n, \forall\ x \in \mathbb{R}.$.

Notăm $f(x) = \left(\frac{a_1}{n}\right)^x + ... + \left(\frac{a_n}{n}\right)^x \geq n = f(0),$ 0 punct de minim;

f este derivabilă $\xrightarrow{\text{Teorema lui Fermat}} f'(0) = 0$. $f'(x) = \left(\frac{a_1}{n}\right)^x \ln\frac{a_1}{n} + ... + \left(\frac{a_n}{n}\right)^x \ln\frac{a_n}{n}$;

$f'(0) = \ln\frac{a_1 ... a_n}{n^n} = 0 \Rightarrow a_1 a_2 ... a_n = n^n, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Se ştie inegalitatea $e^x \geq x+1,\ x \in \mathbb{R}$, cu egalitate pentru $x = 0$. Atunci $e^{a_1 ... a_n} \geq a_1 a_2 ... a_n + 1 \Rightarrow a_1 a_2 ... a_n > \ln(n^n + 1), \forall\ \text{n} \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât suma elementelor de pe fiecare coloană este egală cu $k \in \mathbb{C}^*$. Aflaţi k ştiind că raportul dintre suma elementelor de pe coalana n a matricei A^{2013} şi suma elementelor de pe coloana $n-1$ a matricei A^{2012} este 2014.

Carmen Botea si Viorel Botea, Brăila

Solutie. Fie $(A^m)^t = (A^t)^m, \forall\ \mathrm{m} \in \mathbb{N}^*$. Suma elementelor pe fiecare linie în matricea A^t este k. Notăm $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$. Avem $A^t \cdot B = k \cdot B$. Prin inducţie după $m \in \mathbb{N}^*$ avem $(A^t)^m \cdot B = k^m \cdot B \Rightarrow (A^t)^m$ are aceeaşi proprietate ca şi A^t, în sensul că suma elementelor de pe fiecare linie este aceeaşi, respectiv aici, k^m.
Suma elementelor de pe linia n în $(A^t)^{2013}$ este k^{2013}. Suma elementelor de pe linia $n-1$ în $(A^t)^{2012}$ este $k^{2012} \Rightarrow \dfrac{k^{2013}}{k^{2012}} = k = 2014$.

3. Aflaţi toate funcţiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $f(f(x))+2f(x)=3x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

Carmen Botea si Viorel Botea, Brăila

Solutie. Fie $f(x)=f(y)\Rightarrow f(f(x))=f(f(y))\Rightarrow x=y\Rightarrow f$ injectivă,
f continuă $\Rightarrow f$ strict monotonă

Fie $y\in\mathbb{R}$; dem.că $\exists$ $x\in\mathbb{R}$, astfelîncât $f(x)=y$.

$f(y)+2y=3x\Rightarrow x=\dfrac{f(y)+2y}{3}\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ surjectivă $\Rightarrow f$ bijectivă .

I. Pp. f strict crescătoare; notăm

$u_0=x,\ u_1=f(x), u_{n+1}=f(u_n)\Rightarrow u_{n+2}+2u_{n+1}=3u_n, \forall\ n\geq 1\Rightarrow t^2+2t-3=0$ (ec. caracteristică)

în $t_{1,2}=\dfrac{-2\pm 4}{2}\Rightarrow t_1=1$ şi $t_2=-3\Rightarrow u_n=C_1+C_2(-3)^n$;

$$\left.\begin{array}{l} u_0=x=C_1+C_2 \\ u_1=f(x)=C_1-3C_2 \end{array}\right\}\Rightarrow 4C_2=x-f(x)\Rightarrow C_2=\frac{x-f(x)}{4};\ C_1=\frac{3x+f(x)}{4}$$

f strict crescătoare $\Rightarrow u_{n+1}-u_n$ are semn constant $\Rightarrow C_2=0\Rightarrow f(x)=x, \forall\ x\in\mathbb{R}$.

II. Pp. f strict descrescătoare; $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ deoarece f surjectivă; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$; notăm $h(x)=f(x)-x$; $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este strict descrescătoare, continuă şi $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=-\infty\Rightarrow\exists!\ x_0\in\mathbb{R},\ h(x_0)=0\Rightarrow f(x_0)=x_0$, deci x_0 este unic punct fix pentru f.

f bijectivă $\Rightarrow\exists g=f^{-1},\ v_0=f(x),\ v_1=x,\ v_2=g(x),\dots,v_{n+1}=g(v_n)$

$\Rightarrow 3v_{n+2}=2v_{n+1}+v_n,\ \forall n\geq 1\Rightarrow$ ecuaţia caracteristică $3y^2-2y-1=0$ cu soluţiile 1 si $\dfrac{-1}{3}$.

$$\Rightarrow v_n=C_1^{'}+C_2^{'}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=v_0=C_1^{'}+C_2^{'} \\ x=v_1=C_1^{'}-\dfrac{C_2^{'}}{3} \end{array}\right\}\Rightarrow f(x)-x=\frac{4C_2^{'}}{3}\Rightarrow C_2^{'}=\frac{(f(x)-x)3}{4}\text{ şi } C_1^{'}=\frac{f(x)+3x}{4}.$$

Dar $g(C_1^{'})=C_1^{'}\Rightarrow f(C_1^{'})=C_1^{'}\Rightarrow C_1^{'}=x_0\Rightarrow\dfrac{f(x)+3x}{4}=x_0\Rightarrow f(x)=-3x+4x_0$.

Aşadar, sunt două soluţii: $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ şi $f(x)=-3x+4x_0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, unde x_0 este punctul fix al lui f.