

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 09.02.2013

Barem
Clasa a 10-a

1. a) Scrie $z = a+bi$ și rescrie egalitatea dată de problemă 1p
Scrie și rezolvă sistemul 2p
b) Aplică proprietățile logaritmilor 1p
Ajunge la ecuația $10t^2 - 7t + 1 = 0$ $t=y/x$ și finalizează 1p
c) Fie x_0 soluția reală a ecuației 1p
Deduce parametrul m 1p
2. a) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$ 1p
Aplică proprietatea de mai sus în contextul problemei
și ajunge la relația $(z - \bar{z}) \left(1 - z \bar{z} \right) = 0$ 2p
Finalizează 1p
b) Fie $m < n$ și z_0 soluția ecuației $z^{2^m} = -1$ 1p
Dacă z_0 este soluție comună atunci obține contradicția
 $-1 = z_0^{2^n} = z_0^{2^m \cdot 2^{n-m}} = (-1)^{2^{n-m}} = 1$ 2p
3. a) Aplică de două ori inegalitatea mediilor și finalizează 4p
b) Aplică de două ori inegalitatea mediilor și finalizează 3p
4. $z_3 = z_1 - z_2$ 1p
Ajunge la ecuația $z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2 = 0$ 2p
Deduce că $\frac{z_1}{z_2} = \varepsilon$ unde $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ 2p
Deduce $|z_1| = |z_2|$ 1p
Finalizare 1p