MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN TIMIŞ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 09.02.2013

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE CLASA A XI-A MATEMATICĂ-INFORMATICĂ

Subiectul 1:

a) Foloseste Hamilton-Cayley si obtine $X^2 = tX$ unde $t = trX$ 2p

Observa $X^3 = t^2 X$ de unde $t^2 X = A$ 1p

Deduce $t = -1$ si finalizeaza $X = A$ 1p

b) Aduna linia intai la celelalte linii 1p

Deduce ca elementele liniilor 2, 3, ..., n sunt numere pare 1p

Scoate factor comun pe 2 din aceste linii si finalizeaza 1p

Subiectul 2:

a) Scrie $B=I_n-A$ ……………………………………………………………………………….…1p

Inmulteste la stanga si la dreapta relatia anterioara cu A ……………………………………………..1p

Deduce $AB=BA$ ……………………………………………………………………………….…1p

b) Inmulteste $A+B=I_n$ la stanga cu A, $A^2+AB=A$ la dreapta cu A si obtine $ABA=O_n$………………...1p

Scrie $(AB)^2=(ABA)B$ de unde $(AB)^2=O_n$ …………………...…………………………...………1p

Din $I_n=I_n-(AB)^2$ deduce $\det(I_n-AB)\det(I_n+AB)=1$……………………………………….……..1p

Finalizeaza $\det(I_n+AB) \neq 0$ ……………………...………………………………………….….1p

Subiectul 3:

a) Scrie $a_{n+1} - a_n = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < 0$ ……………………………………….……….....1p

Observa $\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{k}}, k = \overline{1, n-1}$ …………………………..………………......1p

Prin adunare obtine $-2<a_{n-1}$, pentru orice n>1 si deduce convergenta sirului ………………………...1p

b) Scrie $x_n = \dfrac{a_n - a}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$, unde $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ …………………………………………………………..1p

Aplica Stolz-Cesaro cazul $\dfrac{0}{0}$ ……………………………………………………………………..1p

Obtine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ …………………………………………………………...1p

Finalizeaza $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$ …………………………………………………………………...1p

Subiectul 4:

Scrie $x_{n+1} - 1 = (x_n - 1)^2 \geq 0$ si $x_{n+1} - 2 = x_n(x_n - 2)$ ………………………………………...1p

Demonstreaza prin inductie matematica marginirea sirului …………………….……………..…….. 1p

Calculeaza $x_{n+1} - x_n = (x_n - 1)(x_n - 2) \leq 0$ ……………………………………………………..1p

Deduce monotonia sirului…………………………………………..…………………………1p

Trece la limita in relatia de recurenta si obtine x=1 sau x=2, unde $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ………………….……1p

Daca $x_0=a=2$ atunci $x_n=2$ pentru orice $n \in N$ si
$x_n \to 2$ ……………………………………….....…1p

Daca $x_0=a\in[1,2)$ atunci $x_n\in[1,2)$ si cum (x_n) este descrescator avem
$x_n \to 1$ ……….……………1p