

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN TIMIȘ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 09.02.2013

CLASA A VI-A

BAREM

1.  $(2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 84) \cdot \left( \frac{2}{7 \cdot 9} + \frac{2}{9 \cdot 11} + \frac{2}{11 \cdot 13} + \dots + \frac{2}{19 \cdot 21} \right) =$   
 $= 4(1 + 2 + 3 + \dots + 42) \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{19} \right) \dots 2\mathbf{p}$   
 $4 \cdot 42 \cdot 43 : 2 \cdot \frac{2}{21} \dots 3\mathbf{p}$   
Finalizare ....**2p**

2.a.  $1 + 8 + 64 = 73 \dots 1\mathbf{p}$

b.  $S = (1 + 8 + 8^2) + 8^3(1 + 8 + 8^2) + \dots + 8^{57}(1 + 8 + 8^2) = \dots 1\mathbf{p}$   
 $= 73(1 + 8^3 + \dots + 8^{57}) \Rightarrow 73|S \dots 1\mathbf{p}$

c.  $S = 1 + 8 + 8^2(1 + 8) + \dots + 8^{59}(1 + 8) = \dots 1\mathbf{p}$   
 $= 9(1 + 8^2 + 8^3 + \dots + 8^{58}) \dots 1\mathbf{p}$   
 $(73, 9) = 1 \Rightarrow 657|S \dots 2\mathbf{p}$ .

3. Notăm  $m(\sphericalangle APN) = x, m(\sphericalangle CNM) = y, m(\sphericalangle BMP) = z$   
Punctele B, M, C sunt coliniare rezultă  $x + z + m(\sphericalangle NMP) = 180$   
Punctele A, N, C sunt coliniare rezultă  $y + z + m(\sphericalangle MNP) = 180$   
Punctele A, P, B sunt coliniare rezultă  $x + y + m(\sphericalangle NPM) = 180 \dots 2\mathbf{p}$   
Adunand cele trei relatii obtinem :  
 $2(x + y + z) + m(\sphericalangle NMP) + m(\sphericalangle MNP) + m(\sphericalangle NPM) = 540 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x + y + z = 180 \dots 1\mathbf{p}$   
 $m(\sphericalangle BAC) = y, m(\sphericalangle ABC) = x, m(\sphericalangle BCA) = z$   
și  $m(\sphericalangle MPN) = z, m(\sphericalangle MNP) = x, m(\sphericalangle PMN) = y \dots 1\mathbf{p}$

Considerăm triunghiurile  $\triangle APN$  și  $\triangle MNP$

$\sphericalangle APN \equiv \sphericalangle PMN$

$[PN] \equiv [PN]$ -latură comună

$\sphericalangle ANP \equiv \sphericalangle MPN \Rightarrow \Delta APN \equiv \Delta MNP \dots 2p$

Analog  $\Delta BPM \equiv \Delta MNP$  si  $\Delta CMN \equiv \Delta MNP \Rightarrow$  punctele M,N,P sunt mijloacele laturilor triunghiului...1p

4.  $(a, a+7) \cdot [a, a+7] = a \cdot (a+7) \Rightarrow$

$$\Rightarrow [a, a+7] = \frac{a \cdot (a+7)}{(a, a+7)} \dots 1p$$

Analog pentru b  $\Rightarrow [b, b+7] = \frac{b \cdot (b+7)}{(b, b+7)} \Rightarrow \frac{a(a+7)}{(a, a+7)} = \frac{b(b+7)}{(b, b+7)} (1) \dots 1p$

$$(a, a+7)|a \text{ si } (a, a+7)|a+7 \Rightarrow (a, a+7)|7 \Rightarrow (a, a+7) \in \{1, 7\} \dots 1p$$

Similar  $(b, b+7) \in \{1, 7\}$

• Dacă  $(a, a+7) = (b, b+7)$  si inlocuind in relatia (1)  $\Rightarrow a(a+7) = b(b+7) \dots 1p$

Vom arata că  $a = b$

Dacă  $a < b \Rightarrow a+7 < b+7 \Rightarrow a(a+7) < b(b+7)$  - nu convine

Dacă  $a > b \Rightarrow a+7 > b+7 \Rightarrow a(a+7) > b(b+7)$  - nu convine  $\Rightarrow a = b \dots 1p$

• Dacă  $(a, a+7) = 7$  si  $(b, b+7) = 1$

$$\text{Avem } 7|a \text{ si } 7|a+7 \Rightarrow 49|a(a+7) \Rightarrow 7|\frac{a(a+7)}{(a, a+7)}$$

$$\text{Din relația (1)} \Rightarrow 7|\frac{b(b+7)}{(b, b+7)} \Rightarrow 7|b(b+7) \Rightarrow 7|b \text{ sau } 7|b+7 \Rightarrow 7|b \text{ și } 7|b+7$$

ce contrazice  $(b, b+7) = 1 \dots 1p$

• Dacă  $(a, a+7) = 1$  si  $(b, b+7) = 7$

$$\text{Avem } 7|b \text{ si } 7|b+7 \Rightarrow 49|b(b+7) \Rightarrow 7|\frac{b(b+7)}{(b, b+7)}$$

$$\text{Din relația (1)} \Rightarrow 7|\frac{(a+7)}{(a, a+7)} \Rightarrow 7|a(a+7) \Rightarrow 7|a \text{ sau } 7|a+7 \Rightarrow 7|a \text{ si } 7|a+7$$

ce contrazice  $(a, a+7) = 1 \dots 1p$