Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a IX-a

Barem de corectare

1. a. Demonstrarea proprietăţii – **2p**. b. Găsirea relaţiei de recurenţă şi a primilor trei termeni ai şirurilor – **1p**.

$x_4=\frac{2}{3}$, $y_4=\frac{1}{3}$, $x_5=\frac{8}{9}$, $y_5=\frac{4}{9}$, $x_6=\frac{23}{27}$, $y_6=\frac{16}{27}$ – **2p**

$x_5, x_6, x_7 \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$ şi $y_5, y_6, y_7 \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ – **1p**

Demonstrarea prin inducţie – **1p**.

2. **a)** $a_2=\frac{1}{2\cdot 3}$ şi $a_3=\frac{1}{3\cdot 4}$ **1p**

P(n) : $a_n=\frac{1}{n\cdot(n+1)}$ **1p**

Demonstraţia prin inducţie **2p**

b) S $=\sum_{1}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}<1$ **3p**

3. A,I,G coliniare dacă şi numai dacă $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AI}$ **1p**

$\overrightarrow{AI}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$ **1p**

$\overrightarrow{AL}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$, AI$\cap BC=\{L\}$ **1p**

Notăm AQ $=x$, $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{c}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ **1p**

$\overrightarrow{AG}=\alpha\overrightarrow{AI}$ devine $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{c}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\alpha b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{\alpha c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$ **1p**

$\frac{x}{2c}=\frac{\alpha b}{a+b+c}$ şi $\frac{1}{2}=\frac{\alpha c}{a+b+c}$ **1p**

Deci raportul lor va fi $\frac{x}{c}=\frac{b}{c}$ adică x $=$ b, AQ $=$ AC.

4. Fixarea reperului $\overrightarrow{AD}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$ – 1p

$\frac{CN}{ND} = k_1$, $\frac{AM}{MD} = k_2$; punctele G , M si N sunt coliniare dacă şi numai dacă

$\overrightarrow{AM} = \alpha\,\overrightarrow{AG} + (1-\alpha)\overrightarrow{AN}$ – 1p;

$\overrightarrow{AM} = \frac{k_2}{1-k_2}$ – 1p; $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$ – 1p; $\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AC} - k_1\overrightarrow{AD}}{1-k_1} = \vec{u} + \frac{1}{1-k_1}\vec{v}$ – 1p;

$k_1 - k_2 = \frac{1}{2}$ – 2p.

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a X-a

Barem de corectare

I. a. (3 puncte)

Aplicăm inegalitatea $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2,\ \forall x,y>0$.

b. (4 puncte)

Folosim inegalitatea de la punctul **a.** pentru $a=3^x$, $b=2^x, c=1$.

II. a. (3 puncte)

Luăm $f(x_1)=f(x_2)$ rezultă $f(f(x_1))=f(f(x_2))$, exploatând acest lucru rezultă $x_1=x_2$. Deci f este injectivă.

b. (4 puncte)

Presupunem că există o astfel de funcție, apoi dând lui x valorile *2* şi *4*, obținem contradicția cu injectivitatea. Deci nu există funcții cu proprietatea cerută.

III. a. (4 puncte)

Notăm $|a|=r$ şi avem $a\cdot\overline{a}=r^2$ şi analoagele. Ținând seama de ipoteză şi de acest lucru obținem $(a+c)(a+b)(b+c)=0$, am folosit că $d=-a-b-c$, $a+b=-(c+d)$, $a+c=-(b+d)$, $b+c=-(a+d)$ şi obține concluzia problemei.

b. (3 puncte)

Ecuația este echivalentă cu $(z^2+\alpha\beta)(z^2+\gamma\delta)=0$. Presupunem că $\alpha=a$, $\beta=b$, deci $a+b=0$, din $a+b+c+d=0$ rezultă $c+d=0$. Deci cele două ecuații vor avea soluțiile a şi b respectiv c şi d.

IV. (4 puncte)

Aplicăm teorema lui Pitagora generalizată în triunghiurile ΔABC şi ΔADC exprimând $\cos B$ şi $\cos D$, apoi însumându-le cu notațiile adecvate obținem $\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc}\geq\frac{4}{d_1^2}$. Am ținut cont că patrulaterul este inscriptibil şi că $\cos B=-\cos D$.

(3 puncte)

Analog obținem $\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}\geq\frac{4}{d_2^2}$, apoi însumând inegalitățile se obține concluzia problemei.

Egalitate se obține atunci când patrulaterul este **pătrat**.

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a XI-a

Barem de corectare

1.) a.) se arată prin calcul direct că: $\det(A-xI_2)=x^2-(\mathrm{Tr}A)x+\det A$………………………….3 puncte

b.) Din teorema Hamilton-Cayley rezultă $A^2-2A+3I_2=O_2$, de unde $A^2+3I_2=2A$ (1)....1 punct

se arată că $\det(A^2+3I_2)=\det(2A)=2^2\det A=12$ (2)..1 punct

din $A^2+I_2=2(A-I_2)$, se obține $\det(A^2+I_2)=2^2\det(A-I_2)=2^2\cdot 2=8$ (3).......................1 punct

Din (2) şi (3) obținem: $2\cdot\det(A^2+I_2)-\det(A^2+3I_2)=2\cdot 8-12=4$. ....1 punct

2.) a.) se folosesc relațiile:

(1) $\det(X+Y)+\det(X-Y)=2\cdot(\det X+\det Y)$

(2) $\det(X\cdot Y)=\det(Y\cdot X)=\det X\cdot \det Y$ pentru scrierea lor.... 2 puncte

punând în relatia (1) X=AB şi Y=BA şi folosind (2) se obtine

(3) $\det(AB+BA)+\det(AB-BA)=4\det A\cdot\det B$..1 punct

Din (3) si identitatea din enunt se obtine cerința punctului a)..............................1punct

b.) se foloseşte relația $X^2-(\mathrm{Tr}X)\cdot X+(\det X)\cdot I_2=O_2$, oricare ar fi $X,Y\in M_2$..... ....1 punct

în care se pune X=AB-BA si avem

$(AB-BA)^2-(\mathrm{Tr}(AB-BA))(AB-BA)+\det(AB-BA)I_2=O_2$ (3)

dar $\mathrm{Tr}(AB-BA)=0$ si tinand seama rezultatul de la a), din (3) rezulta b). …..2 puncte

3.) $a_{2k+1}=\frac{a_{2k}}{2k}+2$ …………………………………………………………..……..1 punct

$a_{2k+2}=a_{2k+1}+\frac{2}{2k+1}=\frac{a_{2k}}{2k}+2+\frac{2}{2k+1}$ ....1 punct

$a_2=3$, $a_3=\frac{7}{2}$, $a_4=\frac{25}{6}$ ....1 punct

se arată prin inducție că $a_{2k}\in(0,5)$ ....2 puncte

cum $a_{2k+1}=\frac{a_{2k}}{2k}+2$, rezultă că EMBED Equation.3 . ...1 punct

de unde

EMBED Equation.3 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ …………………………………………………………..……. 1 punct

4.) a.) se arată prin inducție că $a_n=\frac{n+1}{n!}$ ………………………………… ………….... 2 puncte

demonstrarea că şirul este descrescător……………………………………….…….1 punct

$(a_n)_{n\geq 1}$ strict pozitiv, deci mărginit inferior,

Prin urmare şirul este convergent ……………………………………….……..1 punct b.) Înlocuim a_n cu $\frac{n+1}{n!}$. Limita devine:

$\lim_{n\to\infty} n\cdot\ln[(n-1)!\cdot a_n] = \lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n})^n = \ln e = 1$ .... 3 puncte

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a XII-a

Barem de corectare

I.

a) Demonstreaza ca este monoid …………………….. 3 puncte

b) ………………………………………..3 puncte

c) Exemplu ……………………………..1 punct

II.

a) Din $x^2 = (xy)^2 \Rightarrow xx = xyxy \Rightarrow x = yxy$ (1)

Din $y^2 = (xy)^2 \Rightarrow yy = xyxy \Rightarrow y = xyx$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow xy = yxyxyx \Rightarrow xy = y(xy)^2 x \Rightarrow xy = yy^2 x \Rightarrow xy = y^3 x$ şi folosind (1)

$\Rightarrow xy = y^3(yxy) \Rightarrow xy = y^4 xy \Rightarrow x = y^4 x \Rightarrow e = y^4$ (3) ....3 puncte

$\Rightarrow y^{2013} = (y^4)^{503} \cdot y = e \cdot y = y$ ....1 punct

Din (1) şi (2) $\Rightarrow yx = xyxyxy \Rightarrow yx = (xy)^2 xy \Rightarrow yx = x^2 xy \Rightarrow yx = x^3 y$ şi folosind (1)

$\Rightarrow yx = x^3(xyx) \Rightarrow yx = x^4 yx \Rightarrow y = x^4 y \Rightarrow e = x^4$ ....1 punct

$\Rightarrow x^{2013} = (x^4)^{503} \cdot x = e \cdot x = x$ (4)

b) Din (3) şi (4) $\Rightarrow x^{2013} y^{2013} = xy.$ ....1 punct

c) Folosind ipoteza avem: $(xy)^{2012} = [(xy)^2]^{1006} = (x^2)^{1006} = (x^4)^{503} = e^{503} = e$ ....1 punct

III.

a) Verificare …………………….. 3 puncte

b) Descompune integrala in $I = \int \frac{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}{(x-\sqrt{x})^2} e^x dx - \int \frac{\sqrt{x}}{(x-\sqrt{x})^2} e^x dx$ 1punct

Integreaza prin parti 1punct

Finalizare ....2 puncte

IV.

a) Calculeaza integrand prin parti pentru $k \in \{1,2\}$ .... 4 puncte

b) Aplica inegalitatea Cauchy-Schwarz, forma integrala .... 3 puncte