CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ “ADOLF HAIMOVICI”

Etapa locală – 11 februarie 2012

Clasa a XII-a, profil umanist, specializările: filologie, pedagogic, stiinte sociale-Bareme

1. Pe multimea numerelor reale definim legile de compozitie $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ si

$x \circ y = xy - 3(x+y) + 12$.

a) Sa se verifice ca $(x * 2) - (3 \circ x) = -1, \forall x \in R$;

b) Stiind ca e_1 este elementul neutru în raport cu legea "*" si e_2 este elementul

neutru în raport cu legea "o" sa se calculeze $e_1 * e_2 + e_1 \circ e_2$.

(arhiva concursului A.Haimovici)

<u>Barem de corectare:</u>

a) Verifica prin înlocuire relatia.................3p

b) $\begin{cases} x * e_1 = x \\ x \circ e_2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = 3 \\ e_2 = 4 \end{cases}$............................2p

folosind propietatile elementului neutru obtinem

$e_1 * e_2 + e_1 \circ e_2 = e_1 + e_2 = 7$....................................2p

2. Pe multimea numerelor reale R se considera legea de compozitie $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

a) Să se demonstreze că legea "*" este asociativă.

b) Ştiind că $x_0 \in Q$ şi $x_n = x_0 * x_{n-1}$, oricare ar fi $n \in N^*$, să se arate că $x_7 \in Q$

(selectată de prof. Opriş Adonia)

<u>Barem de corectare:</u>

a) Verificarea proprietății de asociativitate…………3p

b) $x_1 = x_0 * x_0 = \sqrt[3]{2x_0^3}$, $x_2 = x_0 * x_1 = \sqrt[3]{3x_0^3}$ …… $x_{71} = x_0 * x_6 = \sqrt[3]{8x_0^3} = 2x_0 \in Q$……..4p

3. În multimea $M_2(R)$ se considera egalitatea $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$. Sa se arate ca daca a_1, a_2, a_3, a_4 sunt in progresie aritmetica , atunci $b_2 - b_1, b_3 - b_2, b_4 - b_3$ sunt in progresie aritmetica.

(arhiva concursului A.Haimovici)

Barem de corectare:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2a_3 & a_1a_2 + a_2a_4 \\ a_3a_1 + a_3a_4 & a_2a_3 + a_4^2 \end{pmatrix}$$

(2 puncte)

Deci daca $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_1 + 2r$, $a_4 = a_1 + 3r$,atunci

$b_1 = 2a_1^2 + 3a_1r + 2r^2, b_2 = 2a_1^2 + 5a_1r + 3r^2, b_3 = 2a_1^2 + 7a_1r + 6r^2,$

$b_4 - 2a_1^2 + 9a_1r + 11r^2,$ (3 puncte)

de unde rezulta $b_2 - b_1, b_3 - b_2, b_4 - b_3$ sunt in progresie aritmetica.
(2 puncte)

4. Fie funcția $f : M_2(\Re) \to M_2(\Re)$ definită prin $f(A) = A + A^T$, unde A^T este transpusa matricei A.

a) Să se demonstreze că $(A+B)^T = A^T + B^T$, oricare ar fi $A, B \in M_2(\Re)$.

b) Să se determine matricele $A \in M_2(\Re)$ pentru care $f(A) = O_2$

(selectată de prof. Opriş Adonia)

<u>Barem de corectare:</u>

a)Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\Re)$ şi $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\Re)$

verificarea proprietății $(A+B)^T = A^T + B^T$ ……………………..3p

b) $f(A) = O_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$……………….2p

$a = d = 0$ şi $c = -b$, $b \in \Re$ deci $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$……………2p

NOTĂ:
Pentru orice altă soluție corectă se acordă punctajul maxim aferent problemei.