

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16 Februarie 2013

CLASA a V a
BAREM DE CORECTARE

Subiectul I

Să se determine restul împărțirii numărului $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 69 \cdot 70 + 1234$ la 2013.

Soluție:

$2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ 2 puncte
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 69 \cdot 70 = 1 \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot 4 \cdot \dots \cdot \underline{11} \cdot 12 \cdot \dots \cdot \underline{61} \cdot 62 \cdot \dots \cdot 69 \cdot 70 =$
 $= 2013 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 10 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 60 \cdot 62 \cdot \dots \cdot 69 \cdot 70$ 2 puncte
 $1234 < 2013$ 1 punct
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 69 \cdot 70 + 1234 = 2013 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 10 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 60 \cdot 62 \cdot \dots \cdot 69 \cdot 70) + 1234$ 1 punct
conform Teoremei Împărțirii cu Rest, restul cerut este 1234..... 1 punct

Subiectul II

Se consideră opt numere naturale distincte. Efectuând toate sumele oricăror șapte numere, din cele opt, se obțin rezultatele: 42, 47, 50, 52, 54, 55, 56, 57. Determinați cele opt numere.

Gazeta matematică

Soluție:

Notăm cu $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ cele opt numere.

Adunând termen cu termen cele opt sume, se obține

$7 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8) = 413$ 2 puncte

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 59$ 2 puncte

Numerele sunt: 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 17 3 puncte

Subiectul III

Un număr natural de forma \overline{abcd} se numește superb dacă $4 \cdot \overline{ab} = \overline{cd}$.

a) *Câte numere superbe există ?*

b) *Arătați că orice număr superb se divide cu 13.*

Soluție:

a) $4 \cdot 10 \leq 4 \cdot \overline{ab} \leq 99$ 2 puncte

$10 \leq \overline{ab} \leq 24$ 1 punct

Sunt 15 numere 1 punct

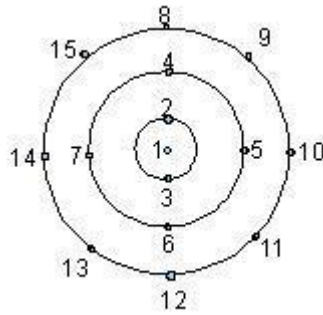
b) $\overline{abcd} = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 100 \cdot \overline{ab} + 4 \cdot \overline{ab} = 104 \cdot \overline{ab}$ 1 punct

$104 \cdot \overline{ab} = 13 \cdot 8 \cdot \overline{ab}$ 1 punct

Finalizare 1 punct

Subiectul IV

Se consideră numerele 1, 2, 3, ... așezate în următoarea schemă de joc tip DARTS (joc cu săgeți la țintă)



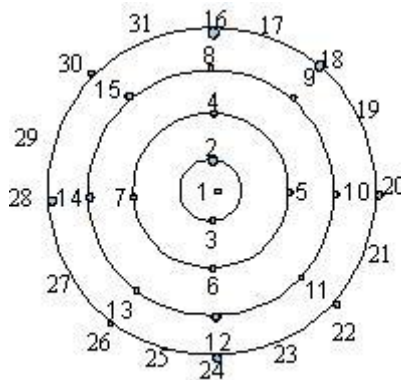
a). *Desenați următorul cerc cu numerele corespunzătoare. Pe al catelea cerc se găsește numărul 2013?*

b). *Să se calculeze suma numerelor pe verticală până la al -10-lea cerc inclusiv, numărând din interior spre exterior.*

c). *Dacă o săgeată DARTS nimereste între doua cercuri consecutive definim scorul ei ca fiind diferența dintre suma numerelor de pe cercul mare și de 4 ori suma numerelor de pe cercul mai mic. Să se precizeze poziția unei săgeți cu scor 128.*

Soluție:

a). Pe următorul cerc se găsesc numerele 16, 17, 18, 19,31 **1punct**



Observăm că pe verticală, primul cerc are cel mai mic număr pe 2^1 , cercul al doilea pe 2^2 , cercul al treilea pe 2^3 , etc.

Cum $2^{10} = 1024$ și $2^{10} < 2013 < 2^{11} = 2048$, numărul 2013 se găsește pe al -10-lea cerc.....**1punct**

b)

Pe verticală avem două sume $1+2^1+2^2+\dots+2^{10}$ și $3 \cdot 1+3 \cdot 2+3 \cdot 2^2+\dots+3 \cdot 2^9$

$S_1 = 1+2^1+2^2+\dots+2^{10} = 2^{11}-1$, iar $S_2 = 3 \cdot 1+3 \cdot 2+3 \cdot 2^2+\dots+3 \cdot 2^9 = 3 \cdot (2^{10}-1)$ **2puncte**

Suma cerută este $2^{11}-1+3(2^{10}-1)=2^{10}(2+3)-1-3= 5 \cdot 2^{10} -4$ (poate fi lăsat $-1-3$) **1 punct**

c).

Observăm următoarea regulă: numerele scrise pe al-n-lea cerc între două numere ale cercului al-(n-1)-lea sunt egale cu suma acestor numere de pe cercul al-(n-1)-lea. Exemplu $9=4+5$, $11=5+6$, $13=6+7$, etc, cu excepția ultimului număr $15=7+8=7+4+4$ **1punct**

Constatăm că suma numerelor de pe cercul al-3-lea este de 4 ori suma de pe cercul al-2-lea și încă $4=2^2$. În general, suma de pe cercul al-n-lea va fi cu 2^{n-1} mai mare ca de 4 ori suma de pe cercul al-(n-1)-lea.

$S_n=2^n+2^n+1+2^n+2+\dots+2^n+2^n-1$, iar $S_{n-1}=2^{n-1}+2^{n-1}+1+2^{n-1}+2+\dots+2^{n-1}+2^{n-1}-1$

$2^n=2^{n-1} \cdot 2$, $2^{n+1}=2^{n-1}+2^{n-1}+1$, ..., $2^n+2^n-1=2^{n-1}+2^{n-1}-1+2^{n-1}+2^{n-1}$ Deci $S_n -4 S_{n-1} = 2^{n-1}$

Cum $128=2^7$, săgeata va ajunge între cercul 7 și cercul 8..... **2puncte**