Universitatea de Vest din Timişoara
Inspectoratul Şcolar Judeţean Arad

Concursul Interjudeţean de Matematică
Memorialul "Traian Lalescu", Ediţia a XXVII-a
Arad, 22-24 martie 2013

BAREM

Clasa a X-a

1. Start ... 1p
Din relaţiile lui Viète se obţine $1 = \frac{|c|}{|a|} = |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = |z_2|$, deci şi a doua soluţie are modulul 1 ... 2p
Din relaţiile lui Viète se obţine $|z_1 + z_2| = \frac{|b|}{|a|} = 1$ ... 1p
Însă $1 = |z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \cdot \overline{z_1 + z_2} = (z_1 + z_2)(\bar{z_1} + \bar{z_2})$ ... 2p
Se înlocuiesc egalităţile $\bar{z_1} = \frac{1}{z_1}, \bar{z_2} = \frac{1}{z_2}$ în egalitatea precedentă ... 1p
Se obţine $1 = (z_1 + z_2)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) = \frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2}$ ... 2p
Din relaţiile lui Viète se obţine $\frac{b^2}{a^2} = \frac{c}{a}$, adică egalitatea din concluzie ... 1p.

2. Start ... 1p
Se obţine factorizarea:
$x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y) = (x - y)(y - z)(x - z)(x + y + z)$ ... 3p
Se consideră $x = z_P - z_A, y = z_P - z_B, z = z_P - z_C$, unde z_A, z_B, z_C, z_P sunt afixele punctelor A, B, C, P ... 1p
Se observă că $|x| = PA, |y| = PB, |z| = PC, |x - y| = AB = c, |y - z| = BC = a, |x - z| = AC = b$ ... 1p
De asemenea $x + y + z = 3\left(z_P - \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right) = 3(z_P - z_G)$, unde z_G este afixul centrului de greutate G ... 1p
Se trage concluzia că $|x + y + z| = 3PG$ ... 1p
Se trece la modul în egalitatea obţinută la punctul a) şi se obţine
$|x|^3|y - z| + |y|^3|z - x| + |z|^3|x - y| \geq |x - y||y - z||x - z||x + y + z|$, care conduce la inegalitatea din enunţ ... 2p.

3. Start ... 1p
Se tratează separat cazurile $n = 0$ şi $n = 1$ ... 1p
Se deduce că $\frac{a^n - b^n}{n(a-b)} = \frac{a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1}}{n}$ ... 1p
Se observă că $a^{n-1} < a^{n-2}b < ... < ab^{n-2} < b^{n-1}$ şi se obţine $a^{n-1} < \frac{a^n-b^n}{n(a-b)} < b^{n-1}$ de unde rezultă concluzia de la punctul a) ... 2p
Se observă că ecuaţia de la punctul b) are soluţiile $m = 0$ şi $m = 1$; se presupune că ar exista cel puţin încă o soluţie ... 1p
Se scrie echivalent ecuaţia de la punctul b) în forma $5^m - 4^m = 7^m - 6^m$; se

aplică rezultatul de la punctul a) şi se obţine că există $c_1 \in (4,5), c_2 \in (6,7)$ astfel încât $mc_1^{m-1} = 5^m - 4^m = 7^m - 6^m = mc_2^{m-1}$ ... 3p
Deoarece $m \neq 0,1$ rezultă $c_1 = c_2$, contradicţie; aşadar ecuaţia are soluţiile $m = 0; m = 1$ ... 1p.

4. Start ... 1p
Din teorema sinusurilor în triunghiurile $AB\Omega, BC\Omega, ABC$ rezultă egalităţile
$\frac{B\Omega}{AB} = \frac{\sin\omega}{\sin B}; \frac{B\Omega}{BC} = \frac{\sin(C-\omega)}{\sin C}; \frac{AB}{BC} = \frac{\sin C}{\sin A}$ ... 1p
Din egalităţile precedente se obţine
$\frac{\sin(C-\Omega)}{\sin\omega} = \sin C \mathrm{ctg}\omega - \cos C = \sin C \cdot \frac{\sin C}{\sin A \sin B} = \sin C \cdot \frac{\sin(A+B)}{\sin A \sin B} = \sin C(\mathrm{ctg}A + \mathrm{ctg}B)$, de unde prin împărţire cu $\sin C$ rezultă egalitatea de la punctul a) ... 2p
Se deduce inegalitatea de la punctul b) aplicând inegalitatea lui Jensen funcţiei convexe ctg (sau în orice altă manieră corectă) ... 2p
Din punctele a) şi b) se deduce că măsura unghiului Brocard ω este mai mică sau egală decât $30°$, utilizând faptul că funcţia ctg este descrescătoare ... 2p
Punctul P este situat în interiorul sau pe laturile unuia dintre triunghiurile $BC\Omega, CA\Omega, AB\Omega$ şi cel puţin unul dintre unghiurile $\angle PBC, \angle PCA, \angle PAB$ are măsura mai mică sau egală decât ω şi cu atât mai mult decât $30°$ ... 2p.