Barem de corectare a soluţiilor la clasa a XII-a

1.

start	1p
a) Obţine: $E^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 \end{bmatrix}$	1p
Obţine $E^{-1}AE = \begin{bmatrix} a+b+c & 0 & 0 \\ 0 & a+\epsilon b+\epsilon^2 c & 0 \\ 0 & 0 & a+\epsilon^2 b+\epsilon c \end{bmatrix}$	2p
b) Observă că $det(circ(a,b,c)) = det(E^{-1}\cdot circ(a,b,c)\cdot E) = (a+b+c)(a+\epsilon b+\epsilon^2 c)(a+\epsilon^2 b+\epsilon c)$	2p
Observă $det(circ(a,b,c)) = 0$ echivalent cu $a+b+c=0$ sau $(a+\epsilon b+\epsilon^2 c)(a+\epsilon^2 b+\epsilon c) = 0$	1p
Reduce $a+b+c=0$ echivalent cu $\frac{1}{3}(a+b+c)=0$, deci $G=O$.	1p
Deduc $(a+\epsilon b+\epsilon^2 c)(a+\epsilon^2 b+\epsilon c) = 0$ ceea ce este echivalent cu $\triangle ABC$ este echilateral.	2p
total	**10p**

2.

start	1p
a) Deduce $f(0)=f(1)=0$ şi $f(x^2) = (\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})f(x); \forall x \geq 0$	1p
Obţine inductiv $f(x^{2^n}) = (\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})\dots\left(\sqrt[3]{x^{2^{n-1}}}+\sqrt{x^{2^{n-1}}}\right)$; $(\forall)x\geq 0$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^n$.	
Deduce $f(x^{2^n}) = \frac{\sqrt[3]{x^{2^n}}-\sqrt{x^{2^n}}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}f(x)$;	1p
$\forall x\in(0,\infty)\setminus\{1\}$, orice $n\in\mathbb{N}^*$	2p
Pentru $x\in(0,\infty)\setminus\{1\}$ $x\to e^{\frac{z}{2^n}}$, $z\neq 0$ obţine	
$f(e^z) = \dfrac{\sqrt[3]{e^z}-\sqrt{e^z}}{\sqrt[3]{e^{\frac{z}{2^n}}}-\sqrt{e^{\frac{z}{2^n}}}}\cdot f\left(e^{\frac{z}{2^n}}\right)$	
pentru orice $z\neq 0$ şi pentru $n\in\mathbb{N}^*$	2p
b) Rescrie sub forma $f(e^z) = (\sqrt[3]{e^z}-\sqrt{e^z})\cdot\dfrac{f(e^{\frac{z}{2^n}})}{e^{\frac{z}{2n}}-1}\cdot\dfrac{e^{\frac{z}{2^n}}-1}{\sqrt[3]{e^{\frac{z}{2^n}}}-\sqrt{e^{\frac{z}{2^n}}}}$	
oricare ar fi $z\neq 0$ şi oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$	1p
Foloseşte $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{f(t)}{t-1} = l$ şi $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t-1}{\sqrt[3]{t}-\sqrt{t}} = -6$ şi deduce $f(e^z) = 6l(\sqrt{e^z}-\sqrt[3]{e^z})$ pentru orice $z\neq 0$	1p
Cum $f(0)=f(1)=0$ deduce $f(x) = 6l(\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})$, oricare ar fi $x\geq 0$	1p
total	**10p**

3.

start	1p
a) $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I_{2013}) \in \mathbb{R}[X]$, $grad(p_A) = 2013 \in 2\mathbb{N}+1$	
rezultă că există $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ rădăcină.	1p
$det(A - \lambda \cdot I_{2013}) = 0$ rezultă că există $u_0 \in \mathcal{M}_{2013,1}(\mathbb{R})$, $u_0 \neq \overline{0}$;	
$(A - \lambda_0 \cdot I_{2013})u_0 = \overline{0}$.	1p
$Au_0 = \lambda_0 u_0$ rezultă $(A^2 + I_{2013})u_0 = (\lambda_0^2 + 1)u_0$ rezultă inductiv	
$(A^2 + I_{2013})^k u_0 = (\lambda_0^2 + 1)^k u_0$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.	2p
Presupunem prin absurd că există $m_0 \in \mathbb{N}$, $(A^2 + I_{2013})^{m_0} = O_{2013}$	
$(A^2 + I_{2013})^{m_0} u_0 = \overline{0}$ rezultă deci: $(\lambda_0^2 + 1)^{m_0} u_0 = \overline{0}$,	1p
$u_0 \neq \overline{0}$ deci $(\lambda_0^2 + 1)^{m_0} = 0$, absurd, aşadar $\lambda \in \mathbb{R}$.	1p
b) Pentru $A \in \mathcal{M}_{2014}(\mathbb{R})$ cerinţa nu este adevărată.	
Construieşte $A \in \mathcal{M}_{2014}(\mathbb{R})$ pentru care există $m_0 \in \mathbb{N}$ cu $(A^2 + I_{2014})^{m_0} = O_{2014}$	
Construim matricea formată din blocurile de matrice B şi C care are pe diagonala principală	
elementele $B, C, \ldots C$, unde B este matricea: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	
şi $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, iar în rest matricea nulă O.	
Facem $B^2 + I_4 = N$ şi vedem că $N^m = O_4$ pentru $m \geq 2$, $C^2 = -I_2$.	
În urma calculelor obţinem că $(A^2 + I_{2014})^m = O_{2014}$, $(\forall) m \geq 2$.	3p
total	**10p**

4.

start	1p
Rescrie relaţia de recurenţă $x_n = x_{n-1} + \left[\frac{x_{n-1}}{n}\right]$ pentru $n \geq 1$	1p
Demonstrează inductiv $x_n = n \cdot [a] + a$, pentru orice $n \geq 0$	3p
Observă: $\left(\frac{x_n}{[a]n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{a}{n[a]}\right)^{\frac{n \cdot [a]}{a}}\right]^{\frac{a}{[a]}} \to e^{\frac{a}{[a]}}$	2p
Observă $x_k - x_{k-} = \left[\frac{x_{k-1}}{k}\right]$ pentru orice $k \geq 1$ şi prin sumare	
deducem $x_n - x_0 = [x_0] + \ldots + \left[\frac{x_{n-1}}{n}\right]$ pentru orice $n \geq 1$	2p
Înlocuind $x_n = n\,[a] + a$, pentru orice $n \geq 0$ deducem $\frac{1}{n}\left([x_0] + \ldots + \left[\frac{x_{n-1}}{n}\right]\right) = [a]$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$	1p
total	**10p**