Inspectoratul şcolar judeţean Arad

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică ”Traian Lalescu”

Ediţia a XXVII-a
Arad, 22-24 martie 2013

clasa a V-a

1. Spunem că 1978 este un an ”miraculos” deoarece toate cifrele lui 1978 sunt nenule, iar suma dintre numărul format cu primele două cifre şi numărul format cu ultimele două cifre ale sale este egală cu numărul format cu cele două cifre din mijloc. Ce an miraculos i-a precedat lui 1978 şi care va fi următorul?

* * *

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

$\overline{abcd}$ este un an miraculos dacă $\overline{ab}+\overline{cd}=\overline{bc}$. Distingem două cazuri: $b+d=c$ şi $a+c=b$, sau $b+d=10+c$ şi $a+c+1=b$. .... **(1p)**

Dacă $b+d=c$ şi $a+c=b$, deducem $a+d=0$ - imposibil (a, d - cifre nenule) **(1p)**

Dacă $b+d=10+c$ şi $a+c=10+b$, obţinem $a+d=9$ .... **(1p)**

În cazul anului miraculos precedent, trebuie ca $a=1$, deci $d=8$ şi $b=c+2$. Cum $b<9$ este cel mai mare posibil, rezultă că $b=8$ şi $c=6$, deci $\overline{abcd}=1868$. .... **(3p)**

În cazul anului miraculos următor, $a=2$, deci $d=7$ şi $b=c+3$. Cum $c>0$ şi b e minim, rezultă $b=4$ şi $c=1$, deci $\overline{abcd}=2417$.................................... **(3p)**

Variantă:

$\overline{abcd}$ este un an miraculos dacă $\overline{ab}+\overline{cd}=\overline{bc}$ adică dacă $10a+b+10c+d=10b+c$, relaţie care revine la $10a+d=9(b-c)$, adică la $\overline{ad}=9(b-c)$..................... **(1p)**

Rezultă că $\overline{ad}$ este divizibil cu 9.. **(2p)**

De aici se continuă ca la soluţia de mai sus.

2. La un campionat de fotbal participă 10 echipe. Fiecare echipă joacă cu toate celelalte o singură dată. În fiecare meci, echipa câştigătoare primeşte 3 puncte, iar cea care pierde 0 puncte. În caz de egalitate, ambele echipe primesc câte 1 punct. La sfârşitul campionatului, echipele acumulează în total 119 puncte.

a) Câte meciuri s-au terminat la egalitate?

b) Arătaţi că printre cele 10 echipe există cel puţin una care a terminat la egalitate cel puţin 4 meciuri.

* * *

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

a) În total se joacă $9 + 8 + 7 + \ldots + 2 + 1 = 45$ meciuri .... **(2p)**

Notăm cu c numărul meciurilor care au avut un câştigător, şi cu e numărul meciurilor care s-au terminat la egalitate. Atunci $c + e = 45$ şi $3c + 2e = 119$. Obţinem $c = 29$ şi $e = 16$. .... **(3p)**

b) Presupunem că fiecare din cele 10 echipe a făcut cel mult 3 egaluri. Deoarece fiecare meci terminat la egalitate este numărat de doua ori (câte o dată pentru fiecare din cele două echipe), cel mult 15 meciuri s-au terminat la egalitate - contradicţie. Rezultă deci că măcar o echipă a terminat cel puţin 4 meciuri la egalitate .... **(4p)**

3. Alina, Bianca şi Cosmin sunt cei trei participanţi la un concurs de cultură generală cu mai multe runde. În fiecare rundă, câştigătorul primeşte a puncte, cel de pe locul doi primeşte b puncte, iar cel de pe ultimul loc primeşte c puncte, unde $a > b > c$ sunt numere naturale nenule. La final Alina totalizează 20 puncte, Bianca 10 şi Cosmin 9. Se ştie că Bianca a câştigat runda a doua.
a) Câte runde s-au desfăşurat?
b) Aflaţi a, b, c şi stabiliţi clasamentul fiecărei runde.

* * *

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

a) Fie n numărul de runde jucate. Atunci $n(a + b + c) = 39$. Cum $a + b + c > 3$, rezultă $a + b + c = 13$ şi $n = 3$. .... **(2p)**

b) Deoarece Bianca a câştigat o rundă şi a totalizat 10 puncte (adică mai puţin decât $a + b + c = 13$ puncte), trebuie ca $a + 2c = 10$. Deducem deci $b = c + 3$. .... **(2p)**

Deoarece Bianca a ieşit ultima în prima şi a treia rundă, Cosmin are cel puţin $2b + c = 3c + 6$ puncte. Din $3c + 6 \leq 9$, obţinem $c = 1$, deci $b = 4$, $a = 8$. .... **(3p)**

Runda I: 1. Alina, 2. Cosmin, 3. Bianca;

Runda II: 1. Bianca, 2. Alina, 3. Cosmin;

Runda III : 1. Alina, 2. Cosmin, 3. Bianca. .... **(2p)**

4. Pentru un număr natural n, notăm cu $s(n)$ suma cifrelor sale impare. De exemplu $s(512416) = 5 + 1 + 1 = 7$, iar $s(224) = 0$. Calculaţi $s(1) + s(2) + s(3) + \ldots + s(1000)$.

* * *

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

Fiecare cifră impară poate apărea în scrierea numerelor $1, 2, \ldots, 999$ ca şi cifră a unităţilor, zecilor sau sutelor .... **(1p)**

În total, în scrierea numerelor $1, 2, \ldots, 999$ fiecare cifră impară apare de 300 ori **(6p)**

Cifra 1 apare în plus o dată ca şi cifră a miilor .... **(1p)**

Suma cerută este deci $300(1 + 3 + 5 + 7 + 9) + 1 = 7501$ .... **(1p)**