Inspectoratul şcolar judeţean Arad

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică ”Traian Lalescu”

Ediţia a XXVII-a
Arad, 22-24 martie 2013

clasa a VI-a

1) Într-un oraş, 2/3 dintre bărbaţi şi 3/5 dintre femei sunt căsătoriţi. (Perechile locuiesc în acelaşi oraş.) Care este raportul dintre numărul persoanele căsătorite şi cele necăsătorite în acest oraş?

* * *

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**
Fie b numărul bărbaţilor şi f numărul femeilor din oraş.
Avem $\frac{2}{3}b = \frac{3}{5}f \overset{\text{not}}{=} k$ .... **(3p)**
deci $b = \frac{3}{2}k$, $f = \frac{5}{3}k$ .... **(1p)**
Avem k bărbaţi căsătoriţi, k femei căsătorite, $b - k = \frac{1}{2}k$ bărbaţi necăsătoriţi, $f - k = \frac{2}{3}k$ femei necăsătorite.. **(2p)**
deci raportul cerut este $\dfrac{k+k}{\frac{1}{2}k + \frac{2}{3}k} = \dfrac{12}{7}$.. **(3p)**

2) Un număr prim p cu mai mult de doua cifre are ultima cifră egală cu suma celorlalte cifre ale sale.
a) Cu ce cifră se poate termina p?
b) Demonstraţi că numărul $p + 4$ este compus.

Dorel Miheţ

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

a) Fie a ultima cifră a lui p. Deoarece p este prim, a este o cifră impară, diferită de 5 . . . . **(1p)**
Din ipoteză rezultă că suma cifrelor lui N este $2a$ . . . . **(1p)**
Cum p nu se divide cu 3, $a \neq 3$ şi $a \neq 9$ . . . . **(2p)**
Prin urmare $a = 1$ sau $a = 7$. Ambele cazuri sunt posibile, de exemplu $p = 101$ are ultima cifră 1, iar $p = 167$ are ultima cifră 7 . . . . **(2p)**
b) Dacă ultima cifră a lui p este 1, atunci $p + 4$ se divide cu 5 şi este mai mare decât 5, deci este compus (sau se observă că $p+4$ are suma cifrelor 6, deci se divide cu 3) . . . . **(1p)**
Dacă p are ultima cifră 7, atunci suma cifrelor lui p este $2 \cdot 7 = 14$, deci $p + 1$ se divide cu 3 . . . . **(1p)**
Atunci şi $p + 4$ se divide cu 3, şi fiind diferit de 3, el este compus . . . . **(1p)**

3) Numărul $N = \overline{a_1a_2a_3...a_{2013}}$ are 2013 cifre şi se termină cu cifra 1. Se ştie că fiecare din numerele $\overline{a_1a_2}$, $\overline{a_2a_3}$, $\overline{a_3a_4}$, $\overline{a_4a_5}$, ..., $\overline{a_{2011}a_{2012}}$, $\overline{a_{2012}a_{2013}}$ (determinate de câte două cifre vecine ale lui N) se divide sau cu 17 sau cu 23. Aflaţi prima cifră a lui N.

* * *

Soluţie şi barem de corectare

Start . . . . **(1p)**
Multiplii de 2 cifre ai numerelor 17 şi 23 sunt: $17, 34, 51, 68, 85$; $23, 46, 69, 92$ **(2p)**
Deducem că, începând de la dreapta, cifrele lui N sunt în ordine: $1, 5, 8, 6, 4, 3, 2, 9$, $6, 4, 3, 2, 9, ...$ . . . . **(2p)**
Se observă că în continuare grupul de 5 cifre $6, 4, 3, 2, 9$ începe să se repete . . **(1p)**
Numărul N are $(2013 - 3) : 5 = 402$ asemenea grupe complete de 5 numere **(2p)**
Deci prima cifră a lui N este 9 . . . . **(2p)**

4) Bisectoarele unghiurilor $\angle ABC$ şi $\angle ACB$ ale triunghiului isoscel ABC ($AB = AC$) intersectează AC şi AB respectiv în D şi E.
a) Demonstraţi că $\triangle BED$ este triunghi isoscel.
b) Dacă în plus $AD = BC$, aflaţi $m(\angle BDC)$.

Dorel Miheţ

Soluţie şi barem de corectare
Start . . . . **(1p)**
a) $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$ (ULU) $\Rightarrow EA = AD$, deci $\triangle AED$ este isoscel cu baza $[ED]$. Exprimând măsura unghiului de la bază în funcţie de măsura unghiului A obţinem $m(\angle AED) = \frac{180° - m(\angle A)}{2}$, iar din triunghiul isoscel $\triangle ABC$ $m(\angle ABC) = \frac{180° - m(\angle A)}{2}$.
Prin urmare $\angle ABC \equiv \angle AED$, deci $ED \| BC$ . . . . **(2p)**
$ED \| BC \Rightarrow \angle BDE \equiv \angle DBC$ (alterne interne).

Cum $\angle DBC \equiv \angle EBD$ ($[BD]$ este bisectoarea unghiului B), rezultă că
$\angle BDE \equiv \angle EBD$, deci $\triangle BED$ este isoscel cu $BE = ED$ .... **(2p)**
b) Din ipoteză, $AD = BC$. Am demonstrat că $\angle ADE \equiv \angle ACB$ şi că $BE = ED$.
Cum $BE = DC$ (diferenţe de segmente congruente), $[ED] \equiv [DC]$.
Rezultă că $\triangle ADE \equiv \triangle BCD$ (LUL) .... **(3p)**
Atunci $EA = BD$ şi, cum $EA = AD = BC$, deducem că $BD = BC$.
Notând cu $2x$ măsura unghiului $\angle BDC$ şi scriind că suma măsurilor unghiurilor triunghiului BDC este $180°$ obţinem
$2x + 2x + x = 180°$, deci $x = 36°$, de unde $m(\angle BDC) = 72°$ .... **(2p)**