Inspectoratul şcolar judeţean Arad

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"

Ediţia a XXVII-a
Arad, 22-24 martie 2013

clasa a VII-a

1) Fie $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ astfel încât $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 6$.

Demonstraţi că $a \neq b$, iar numărul $\dfrac{a+b}{a-b}$ este iraţional.

* * *

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

Dacă presupunem, prin reducere la absurd, că $a = b$, atunci $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 2$, în contradicţie cu ipoteza. Deci $a \neq b$ .... **(1p)**

Scriem egalitatea $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 6$ sub forma $a^2 + b^2 = 6ab$.

Din această relaţie obţinem $a^2 + b^2 - 2ab = 4ab$, deci $(a-b)^2 = 4ab$ .... **(3p)**

şi $a^2 + b^2 + 2ab = 8ab$, deci $(a+b)^2 = 8ab$ .... **(2p)**

Rezultă că $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2 = 2$, deci $\dfrac{a+b}{a-b}$ este iraţional........................ **(3p)**

2) Se dă triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$. Bisectoarea unghiului $\angle ABC$ intersectează (AC) în D. Demonstraţi că dacă două dintre segmentele $[AD]$, $[BD]$, $[BC]$ sunt congruente, atunci toate cele trei segmente sunt congruente.

Dorel Miheţ

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

Avem de demonstrat trei implicaţii:

• *Dacă $AD = BD$ atunci $AD = BD = BC$.*

Notând $m(\angle ABD) = x$, avem: $m(\angle BAC) = x$, $m(\angle ACB) = m(\angle ABC) = 2x$,

deci $m(\angle BDC) = m(\angle BAC) + m(\angle ABD) = 2x = m(\angle BCA)$, de unde
$BD = BC$. (Se poate chiar afla x, $x = 36°$.) .... **(2p)**

• *Dacă $BD = BC$ atunci $AD = BD = BC$.*

Notând $m(\angle ABD) = x$, avem: $m(\angle ACB) = m(\angle ABC) = 2x$, deci şi $2x = m(\angle BDC) = m(\angle BAC) + m(\angle ABD)$, de unde $m(\angle BAC) = x = m(\angle ABD)$, deci $BD = AD$. .... **(2p)**

• *Dacă $AD = BC$ atunci $AD = BD = BC$.*

Din teorema bisectoarei, $\dfrac{AD}{CD} = \dfrac{AB}{BC}$ .... **(2p)**

Folosind că $AD = BC$ şi $AB = AC$ obţinem din relaţia de mai sus că $\dfrac{BC}{CD} = \dfrac{AC}{BC}$.
Unghiul $\angle C$ fiind comun, rezultă că triunghiurile $\Delta\, BCD$ şi $\Delta\, ACB$ sunt asemenea (cazul II de asemănare). Cum $\Delta\, ACB$ este isoscel cu $AC = AB$, rezultă că şi ΔBCD este isoscel, cu $BC = BD$, de unde concluzia. .... **(3p)**

Varianta 2: Ducem $DE \parallel BC$, $E \in AB$. .... **(1p)**

Atunci $\angle ADE \equiv \angle ACB \equiv \angle ABC \equiv \angle AED$, deci $AE = AD$. Rezultă că $BE = CD$. .... **(1p)**

Avem totodată $\angle EDB \equiv \angle DBC \equiv \angle DBE$, deci triunghiul BDE este isoscel cu $DE = BE = CD$. .... **(1p)**

Atunci triunghiurile AED şi BCD sunt congruente (L.U.L), de unde
$AD = BD$. .... **(2p)**

Varianta 3: Să notăm $m(\angle ABD) = x$. Atunci $m(\angle ACB) = m(\angle ABC) = 2x$, $m(\angle BAC) = 180° - 4x \overset{\text{not}}{=} y$ şi $m(\angle BDC) = x + y$. Folosind faptul că într-un triunghi la latura mai mare se opune unghiul mai mare, avem:
$x < y \Leftrightarrow AD < BD \Leftrightarrow BC < BD \Leftrightarrow x + y < 2x \Leftrightarrow y < x$, contradicţie.
Prin urmare fiecare din presupunerile $x < y$ şi $y < x$ duce la o contradicţie, deci trebuie ca $x = y$, adică $AD = BD = BC$. .... **(5p)**

3) În triunghiul ABC cu $AB = 13$, $CA = 15$, $BC = 14$, notăm cu E, D, M respectiv picioarele înălţimii, bisectoarei şi medianei din A. Latura $[BC]$ se împarte în n părţi egale, printre punctele de diviziune aflându-se şi punctele E, D, M. Aflaţi cea mai mică valoare posibilă a lui n.

Evan Chen (NIMO 2013)

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

Din teorema bisectoarei, $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{13}{15}$. Folosind proportii derivate obţinem $BD = \dfrac{13}{2}$, $DC = \dfrac{15}{2}$, deci $DM = \dfrac{1}{2}$ .... **(2p)**

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile ABE şi AEC deducem că
$EC^2 - EB^2 = AC^2 - AB^2$, adică $(EC - EB)(EC + EB) = 15^2 - 13^2 = 2 \cdot 28$.

Rezultă că $EC - EB = 4$, deci $EC = 9$, $EB = 5$ . . . . **(3p)**
Din $DM = \frac{1}{2}$ rezultă că distanţa dintre două puncte de diviziune vecine este $\leq \frac{1}{2}$, deci $n \geq 14 \cdot 2 = 28$ . . . . **(2p)**.
Pe de altă parte, deoarece $BE = \frac{10}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$, $BM = \frac{28}{2}$, dacă împărţim $[BC]$ în 28 de părţi egale, diviziunea conţine punctele D, E, M. Aşadar valoarea minimă a lui n este 28 . . . . **(2p)**

4) a) Fie $m \in \mathbb{N}$. Arătaţi că $m^2 + 1$ nu se divide cu 7.
b) Există $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $2013^n + 1$ se divide cu $6^n - 1$?

Dorel Miheţ

Soluţie şi barem de corectare

Start . . . . **(1p)**
a) Numărul m poate avea una din formele $M7$, $M7 \pm 1$, $M7 \pm 2$ sau $M7 \pm 3$. Corespunzător, m^2 poate fi de forma $M7$, $M7+1$, $M7+4$ sau $M7+2$, deci m^2+1 nu se divide cu 7. . . . . **(2p)**
b) Evident $n = 0$ nu convine. Presupunem că ar exista $n \geq 1$, astfel ca $6^n - 1$ să dividă $2013^n + 1$, Atunci ultima cifră a lui $6^n - 1$ este 5, deci $6^n - 1$ este divizibil cu 5. Trebuie atunci ca 5 să dividă $2013^n + 1$. Cum $2013^n + 1$ este număr par, trebuie ca ultima cifră a lui $2013^n + 1$ să fie 0, deci $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$. . . . . . . **(2p)**
Atunci $6^n - 1 = (7-1)^{4k+2} - 1 = M7 + (-1)^{4k+2} - 1 = M7$, deci $6^n - 1$ se divide cu 7. . . . . **(3p)**
Rezultă că şi $2013^n + 1$ se divide cu 7, adică $(2013^{2k+1})^2 + 1$ se divide cu 7, în contradicţie cu proprietatea demonstrată la a) (cu $m = 2013^{2k+1}$).
Prin urmare nu există numere naturale n pentru care $2013^n + 1$ să fie divizibil cu $6^n - 1$. . . . . **(2p)**