Inspectoratul şcolar judeţean Arad

Universitatea de Vest din Timişoara
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul interjudeţean de matematică "Traian Lalescu"

Ediţia a XXVII-a

Arad, 22-24 martie 2013

clasa a VIII-a

1) Demonstraţi că dacă a, b sunt numere naturale diferite de zero, iar $\dfrac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+1} \in \mathbb{Q}$, atunci $\dfrac{a^2+b^2+1}{a+b+1}$ este număr natural.

Prelucrare după Ştefan Smarandache (Olimpiada Naţională 1994)

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

Dacă $\dfrac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+1} = q \in \mathbb{Q}$ atunci $a\sqrt{3}+b = bq\sqrt{3}+q$, adică $(a-bq)\sqrt{3} = q-b$ .... **(2p)**

Dacă $a-bq \neq 0$ ar rezulta că $\sqrt{3} = \dfrac{q-b}{1-bq} \in \mathbb{Q}$, contradicţie .... **(1p)**

Rezultă $a-bq=0$, deci şi $q-b=0$. Atunci $a=bq=b^2$ .... **(1p)**

Putem scrie atunci $\dfrac{a^2+b^2+1}{a+b+1} = \dfrac{b^4+b^2+1}{b^2+b+1} = \dfrac{b^4+2b^2+1-b^2}{b^2+b+1} = \dfrac{(b^2+1)^2-b^2}{b^2+b+1} = \dfrac{(b^2+1-b)(b^2+1+b)}{b^2+b+1} = b^2-b+1$ .... **(4p)**

care este număr natural fiind întreg şi pozitiv (pentru că $\dfrac{a^2+b^2+1}{a+b+1} > 0$, sau pentru că $b^2 \geq b$) .... **(1p)**

Variantă pentru prima parte: Amplificând cu conjugata numitorului obţinem

$\dfrac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+1} = \dfrac{3ab-b}{3b^2-1} + \dfrac{b^2-a}{3b^2-1}\sqrt{3}$ .... **(2p)**

Cum $\dfrac{3ab-b}{3b^2-1}, \dfrac{b^2-a}{3b^2-1}$ sunt numere raţionale, ... **(1p)**

$\dfrac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+1} \in \mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă $\dfrac{b^2-a}{3b^2-1} = 0$, adică dacă şi numai dacă $b^2 = a$ .... **(1p)**

2) Baza piramidei $VABC$ este triunghiul echilateral ABC. Demonstraţi că dacă cele patru feţe ale piramidei au ariile egale, atunci $VABC$ este tetraedru regulat.

Dorel Miheţ

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

Fie O proiecţia lui V pe planul bazei, iar M, N, P picioarele perpendicularelor din O pe AB, BC, CA (respectiv).

Din teorema celor trei perpendiculare rezultă că VM, VN, VP sunt înălţimi în triunghiurile VAB, VBC, VCA.. **(1p)**

Deoarece $AB = BC = CA = a$, iar feţele laterale au aceeaşi arie, deducem că $VM = VN = VP$, iar din $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{VAB}$ obţinem că $VM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .... **(2p)**

Rezultă că $\triangle VOM \equiv \triangle VON \equiv \triangle VOP$, deci $OM = ON = OP$. Prin urmare O este sau punctul de intersecţie a bisectoarelor interioare sau punctul de intersecţie a două din bisectoarele exterioare ale triunghiului ABC....................................... **(2p)**

În primul caz, O coincide cu punctul de intersecţie a mediatoarelor laturilor triunghiului ABC, deci $VA = VB = VC$. În plus, din $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{VAB}$ rezultă $VM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, deci $VA = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}} = a$, adică feţele laterale sunt triungiuri echilaterale.............. **(1p)**

Arătăm că al doilea caz este imposibil. Presupunem că O este la intersecţia bisectoarelor exterioare ale unghiurilor A şi C. Atunci $\triangle OAC$ este triunghi echilateral (are două unghiuri de măsură $60°$) .... **(1p)**

deci $OM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, ceea ce este absurd, căci triunghiul VPC ar avea ipotenuza VP egală cu OP, care este catetă .... **(2p)**

Pentru tratarea completă a primului caz se acordă **5p**.

Observaţie. Un tetraedru cu toate feţele de aceeaşi arie se numeşte tetraedru echifacial. Într-un tetraedru echifacial muchiile opuse sunt congruente.

3) Fie $x_1, x_2, ..., x_{10} \in \mathbb{N}$ cu $x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 15$.
Demonstraţi că $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2 \geq 25$.

Andrei Eckstein

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

Din inegalitatea lui Cauchy-Buniakowski rezultă că $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2 \geq 22,5$, deci $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2 \geq 23$ .... **(3p)**

Deoarece $x_1^2+x_2^2+...+x_{10}^2$ are aceeaşi paritate cu $x_1+x_2+...+x_{10}$, rămâne să demonstrăm că $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{10}^2 \neq 23$ .... **(2p)**

Pentru aceasta considerăm scrierile lui 23 ca sumă de cel mult 10 pătrate perfecte nenule şi arătăm că $x_1 + ... + x_{10} \neq 15$:

$16 + \underbrace{1 + ... + 1}_{7} \rightsquigarrow 4 + 7 = 11$

$16 + 4 + 1 + 1 + 1 \rightsquigarrow 4 + 2 + 1 + 1 + 1 = 9$

$9 + 9 + \underbrace{1 + ... + 1}_{5} \rightsquigarrow 6 + 5 = 11$

$9 + 9 + 4 + 1 \rightsquigarrow 6 + 3 = 9$

$9 + 4 + 4 + \underbrace{1 + ... + 1}_{6} \rightsquigarrow 3 + 4 + 6 = 13$

$9 + 4 + 4 + 4 + 1 + 1 \rightsquigarrow 3 + 6 + 2 = 11$

$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 1 + 1 + 1 \rightsquigarrow 10 + 3 = 13$ .... **(4p)**

Observaţie. Valoarea minimă a lui $\sum x_i^2$ este 25 şi se atinge când 5 dintre numerele $x_1, ..., x_{10}$ sunt 2, iar celelalte 1.

Soluţia a II-a

Start .... **(1p)**

Dacă printre cele zece numere sunt 0-uri atunci există neapărat şi numere x cu $x > 1$ şi înlocuind perechea $(0, x)$ cu $(1, x - 1)$ micşorăm suma pătratelor. Scăpăm astfel de 0-uri .... **(3p)**

La fel, dacă printre numerele date există şi $x > 2$, atunci neapărat printre ele este şi 1. Înlocuind perechea $(x, 1)$ cu $(x - 1, 2)$ micşorăm iarăşi suma pătratelor .... **(3p)**

Astfel minimul se obţine atunci când toate numerele sunt 1 sau 2 .... **(1p)**

Se constată imediat că pentru a obţine suma 15 trebuie ca 5 dintre numerele $x_1, ..., x_{10}$ să fie 2, iar celelalte 1. Deci valoarea minimă pentru $\sum x_i^2$ este $5 \cdot 4 + 5 = 25$ .... **(2p)**

Soluţia a III-a

Start .... **(1p)**

Pentru orice număr natural n este adevărată inegalitatea $n^2 \geq 3n - 2$ (se reduce la $(n-1)(n-2) \geq 0$) .... **(6p)**

Deci $\sum x_i^2 \geq 3 \sum x_i - 20 = 25$ .... **(3p)**

4) Se ştie că modificând o singură cifră din scrierea zecimală a numărului $2^{42643801}$ se obţine un număr prim p.

a) Care este ultima cifră a lui p?

b) Arătaţi că 42643801 este număr prim.

Dorel Miheţ

Soluţie şi barem de corectare

Start .... **(1p)**

a) Numărul $2^{42643801}$ se termină cu cifra 2 .... **(1p)**

deci pentru a obţine numărul p trebuie să modificăm ultima cifră a sa .... **(1p)**

Arătăm că această cifră trebuie schimbată în cifra 1 (deci p se termină în 1). Într-adevăr:

-Dacă $u(p) = 3$, atunci $p = 2^{42643801} + 1$. Această egalitate este însă imposibilă, deoarece $2^{42643801} + 1$ se divide cu 3 .... **(1p)**

-Dacă $u(p) = 7$, atunci $p = 2^{42643801} + 5$. Însă $2^{42643801} + 5 = 2 \cdot 2^{42643800} + 5 = 2 \cdot 8^{14214600} + 5 = 2(7k+1) + 5$ este multiplu de 7, contrazicând faptul că p este prim .... **(2p)**

-Dacă $u(p) = 9$, atunci $p = 2^{42643801} + 7 = 2^{42643801} + 1 + 6$ se divide cu 3, absurd .. **(1p)**

b) Din a) rezultă că numărul $p = 2^{42643801} - 1$ este prim. Presupunem prin absurd că numărul 42643801 este compus.

Atunci $42643801 = m \cdot n$, cu $1 < m, n < 42643801$, deci $1 < 2^m - 1 < 2^{42643801} - 1$ şi $2^{42643801} - 1 = 2^{mn} - 1 = (2^m)^n - 1$ se divide cu $2^m - 1$, absurd. Contradicţia la care am ajuns ne arată că 42643801 este prim .... **(3p)**

Observaţie. Un număr prim de forma $2^n - 1$ se numeşte număr prim Mersenne. Dacă $2^n - 1$ este număr prim Mersenne, atunci n este prim. Numărul p din problemă este un număr prim Mersenne care are 12.837.064 cifre (al treilea ca mărime cunoscut până în prezent).