Barem de corectare a soluţiilor la clasa a IX-a

1. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere naturale definit prin $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ şi

$$x_{n+2} = \text{restul împărţirii numărului } 23x_n + 27x_{n+1} \text{ prin } 2013\,.$$

Arătaţi că există $n_0, k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $x_{n+k} = x_n$, $(\forall)n \geq n_0$.

start	1p
observă că $x_n \in \{0, 1, \ldots, 2012\}, (\forall)n \in \mathbb{N}$	2p
deduce că $(x_n, x_{n+1}) \in \{0, 1, \ldots, 2012\} \times \{0, 1, \ldots, 2012\}, (\forall)n \in \mathbb{N}$	2p
cum $\{0, 1, \ldots, 2012\} \times \{0, 1, \ldots, 2012\}$ este finită,	
deduce că există $n_0, k \in \mathbb{N}^*$, cu $(x_{n_0}, x_{n_0+1}) = (x_{n_0+k}, x_{n_0+k+1})$	3p
arată prin inducţie după n că $x_{n+k} = x_n$, $(\forall)n \geq n_0$	2p
total	**10p**

2. Rezolvaţi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x^3 - x + 2 = 2y \\ y^3 - y + 2 = 2z \\ z^3 - z + 2 = 2x. \end{cases}$$

start	1p
observă că $x^3 - 3x + 2 = 2(y - x)$(şi analoagele)	2p
descompune $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$	2p
deduce că dacă $x \in \{-2, 1\}$, atunci $x = y = z$	2p
arată că dacă $x < -2$, atunci $x > y$, de unde $x > y > z > x$	1p
arată că dacă $x > -2, x \neq 1$, atunci $x < y$, de unde $x < y \leq z \leq x$	1p
deduce că singurele soluţii sunt $(-2, -2, -2)$ şi $(1, 1, 1)$	1p
total	**10p**

3. Fie ABC un triunghi oarecare, de laturi a, b şi c, D - punctul în care bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ intersectează cercul circumscris triunghiului, iar $M \in AB$ şi $N \in AC$ puncte diferite de vârfurile triunghiului.

a) Determinaţi $y, z \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\overline{AD} = y \cdot \overline{AB} + z \cdot \overline{AC}\,.$$

b) Dacă P_1, P_2, P_3 sunt trei puncte în planul $\mathcal{P}$ al triunghiului, iar $(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3, i = \overline{1,3}$ sunt trei triplete de numere reale cu proprietatea că $x_i + y_i + z_i = 1$, $(\forall)i = \overline{1,3}$ şi

$$\overline{OP_i} = x_i \cdot \overline{OA} + y_i \cdot \overline{OB} + z_i \cdot \overline{OC} \quad , (\forall)O \in \mathcal{P},$$

atunci punctele P_1, P_2, P_3 sunt coliniare dacă şi numai dacă există $u, v, w \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$ux_i + vy_i + wz_i = 0 \quad , (\forall)i = \overline{1,3}.$$

c) Arătaţi că punctele M, N şi D sunt coliniare dacă şi numai dacă

$$b \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} + c \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{AN}} = \frac{a^2}{b+c}\,.$$

start	1p
a) arată că D este mijlocul segmentului $[II_a]$(cu notaţiile clasice)	1p
deduce că dacă $\overline{AD} = \frac{1}{2}\overline{AI} + \frac{1}{2}\overline{AI_a}$	0,5p
cum $\overline{AI} = \frac{b}{a+b+c} \cdot \overline{AB} + \frac{c}{a+b+c} \cdot \overline{AC}$ şi $\overline{AI_a} = \frac{b}{-a+b+c} \cdot \overline{AB} + \frac{c}{-a+b+c} \cdot \overline{AC}$,	1p
obţine că $\overline{AD} = \frac{b}{-a^2+(b+c)^2} \cdot \overline{AB} + \frac{c}{-a^2+(b+c)^2} \cdot \overline{AC}$	0,5p
b) consideră $\overline{P_1P_2}$ şi $\overline{P_1P_3}$ şi obţine că	
P_1, P_2, P_3-coliniare$\Longleftrightarrow \frac{x_1-x_2}{x_1-x_3} = \frac{y_1-y_2}{y_1-y_3} = \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$ (1)	0,5p
pentru ($\Longrightarrow$) obţine că $u = y_1z_2 - y_2z_z$, $v = z_1x_2 - z_2x_1$, $w = x_1y_2 - x_2y_1$ verifică cerinţa	1p
pentru ($\Longleftarrow$) dacă $ux_i + vy_i + wz_i = 0, (\forall) i = \overline{1,3}$,	
atunci $\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2} = -\frac{v-w}{u-w} = \frac{x_1-x_3}{y_1-y_3}$	1p
de unde obţine că $\frac{x_1-x_2}{x_1-x_3} = \frac{y_1-y_2}{y_1-y_3} = \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$	0,5p
c) arată că pentru $M(x_M, y_M, 0)$ are loc $\frac{x_M}{y_M} = \frac{\overline{BM}}{\overline{MA}}$,	
iar pentru $N(x_N, 0, z_N)$ $\frac{x_N}{z_N} = \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}}$	1p
consideră ecuaţia dreptei MN de forma $ux + vy + wz = 0$,	
pentru care obţine că $\frac{v}{u} = -\frac{x_M}{y_M} = \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}}$,	
respectiv $\frac{w}{u} = -\frac{x_N}{z_N} = \frac{\overline{CN}}{\overline{AN}}$	1p
din a) deduce că $D\left(\frac{-a^2}{-a^2+(b+c)^2}, \frac{b(b+c)}{-a^2+(b+c)^2}, \frac{c(b+c)}{-a^2+(b+c)^2}\right)$	0,5p
deduce că $D \in MN \Longleftrightarrow b \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} + c \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{AN}} = \frac{a^2}{b+c}\,.$	0,5p
total	**10p**

4. Fie ABC un triunghi isoscel, cu $[AB] \equiv [AC]$.
a) Arătaţi că dacă o dreaptă d care trece prin vârful A al triunghiului intersectează dreapta BC într-un punct P, iar cercul circumscris triunghiului ABC a doua oară într-un punct Q, atunci $AP \cdot AQ = AB^2$.
b) Fie $\mathcal{C}$ un cerc tangent interior cercului circumscris triunghiului ABC într-un punct M aflat pe arcul BC care nu coţine punctul A, şi tangent laturii $[BC]$ a triunghiului într-un punct N. Arătaţi că punctele A, M şi N sunt coliniare.

start	1p
a) arată că $\widehat{APB} \equiv \widehat{ABQ}$(dacă $P \in (BC.)$	2p
deduce că $\Delta\, APB \sim \Delta\, ABQ$	1p
şi obţine că $AP \cdot AQ = AB^2$	1p
b) consideră centrele O al cercului circumscris $\Delta\, ABC$ şi O_1 al cercului $\mathcal{C}$	
observă că O, O_1, M sunt coliniare	1p
arată că $\widehat{AMO} \equiv \widehat{OAM}$	1p
consideră $N' \in [AM] \cap [BC]$ şi obţine că $\widehat{AMO} \equiv \widehat{O_1N'M}$	1p
deduce că $AO \parallel N'O_1$, deci $N'O_1 \perp BC$	1p
deduce că $N = N' \in AM$	1p
total	**10p**