OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2013

Clasa a VII-a

VARIANTA 3

BAREM DE CORECTARE:

I. $|xy-2x+y-2|+|-xy+x-y+1|+|3x+3|=$

$=|(x+1)(y-2)|+|(1-y)(x+1)|+3|x+1|$ **2 pcte**

$=|x+1|\cdot(|y-2|+|1-y|+3)$ **2 pcte**

Deoarece $|x+1|\geq 0$ şi $|y-2|+|1-y|+3>0$ **2 pcte**

valoarea minimă a expresiei este 0 se realizeză pt $x+1=0$ deci pentru $x=-1$.
1 pct

II. Din $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}\Rightarrow\frac{x+y}{\sqrt{xy}}\geq 2\Rightarrow\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{1+2}{\sqrt{1\cdot 2}}\geq 2$ **2 pcte**

$\frac{5}{\sqrt{6}}\geq 2, \frac{9}{\sqrt{20}}\geq 2,$ adunăm relațiile $\Rightarrow\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{6}}+\frac{7}{\sqrt{12}}+\frac{9}{\sqrt{20}}\geq 8$ **(1)** **1 pct**

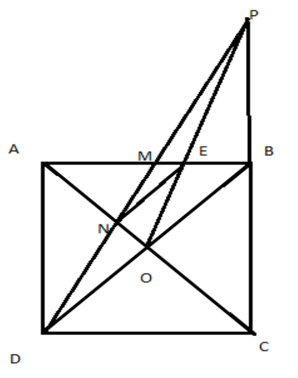
Pentru a doua inegalitate folosim relația $n(n+1)\geq n^2$ pentru $n\in\mathrm{N}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}<\frac{1}{n}\Rightarrow\frac{3}{\sqrt{2}}<\frac{3}{1};\frac{5}{\sqrt{6}}<\frac{5}{2};\frac{7}{\sqrt{12}}<\frac{7}{3}$ şi $\frac{9}{\sqrt{20}}<\frac{9}{4}$ **2 pcte**

$\Rightarrow\frac{9}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{6}}+\frac{7}{\sqrt{12}}+\frac{9}{\sqrt{20}}<\frac{3}{1}+\frac{5}{2}+\frac{7}{3}+\frac{9}{4}<12$ **(2)** **2 pcte**

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ relația cerută.

III.



$A[ABCD]=18\cdot A[NOE]$

În ΔBDA cu AO şi DM mediană $\Rightarrow$N centru de greutate $\Rightarrow\frac{ON}{OA}=\frac{1}{3}$ (1) **2 pcte**

În ΔDBP, PO şi BM sunt mediane, rezultă E este centrul de greutate al triunghiului şi atunci $\frac{BE}{BM}=\frac{2}{3}$.

De aici $\frac{BE}{2\cdot BM}=\frac{1}{3}$, adică $\frac{BE}{BA}=\frac{1}{3}$ (2) **2 pcte**

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Piteşti, Jud. Argeş,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

Din (1) si (2), cu teorema reciprocă a lui Thales deducem că $NE \parallel OB$ şi cum $OB \perp OA$ rezultă $NE \perp NO.$

Cu aceasta avem $A\Delta NOE = \dfrac{NE \cdot ON}{2}.$ **1 pct**

Din ΔANE dreptunghic isoscel obținem $NE = AN = \dfrac{2}{3} \cdot AO$ şi cum din (1)

$NO = \dfrac{1}{3} \cdot AO$ deducem că

$$A\Delta NOE = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot AO \cdot \frac{1}{3} \cdot AO = \frac{1}{9} \cdot AO^2 = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \frac{1}{18} \cdot \frac{AC^2}{2} = \frac{1}{18} \cdot A_{ABCD.}$$

2 pcte.

IV. Din $\Delta EAM \sim \Delta DCM$ (sunt dreptunghice şi $\sphericalangle EMA \equiv \sphericalangle DMC$) obținem

$\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{EM}{MD}, (1)$ 1 pct

Analog, $\Delta FMD \sim \Delta AMB,$ de unde $\dfrac{FM}{AM} = \dfrac{MD}{MB}, (2)$ 1 pct

Înmulțind relațiile (1) şi (2) rezultă $\dfrac{FM}{MC} = \dfrac{EM}{MB}.$ Cum $\sphericalangle EMF \equiv \sphericalangle BMC$ deducem că $\Delta FME \sim \Delta CMB,$ de unde $\sphericalangle MFE \equiv \sphericalangle BCM$ (3) 1 pct

Deoarece patrulaterul EGFM este inscriptibil(are două unghiuri opuse de 90^0) rezultă $\sphericalangle MFE \equiv \sphericalangle MGE$, (4). 1 pct

Din (3) şi (4) avem $\sphericalangle BCM \equiv \sphericalangle MGE (5)$ 1 pct

Din ΔNMC avem $m(\sphericalangle NMC) = 90^0 - m(\sphericalangle BCM)$, iar din ΔEMG avem $m(\sphericalangle EMG) = 90^0 - m(\sphericalangle MGE).$

Folosind (5) rezultă $\sphericalangle NMC \equiv \sphericalangle EMG$ si din teorema reciproca a unghiurilor opuse la varf rezultă că punctele G, M, N sunt coliniare. 2 pct.

NOTĂ:
Orice solutie corecta se punctează corespunzator.