Olimpiada Naţională de Matematică
- etapa locală – 16 februarie 2013
Judeţul Argeş
Clasa a VIII-a

Varianta 3

BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

1. a) Ştiind că $x^2+y^2-8x\sqrt{3}-6y\sqrt{2}+66=0$, x, y ∈ R, comparaţi numerele z şi t, unde $z=\dfrac{[x]-[y]}{[-x]-[-y]}$ şi $t=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ ……………………………..

(3p)

SOLUTIE

$(x-4\sqrt{3})^2+(y-3\sqrt{2})^2=0 \Rightarrow x=4\sqrt{3}$ şi $y=3\sqrt{2}$ ……………………..

(2p)

$z=\dfrac{\left[4\sqrt{3}\right]-\left[3\sqrt{2}\right]}{\left[-4\sqrt{3}\right]-\left[-3\sqrt{2}\right]} \Rightarrow z=\dfrac{6-4}{-7-(-5)}=\dfrac{2}{-2}=-1 \Rightarrow z<t$ ……………………..

(1p)

b) Ştiind că $x+\dfrac{1}{x}=10$, calculaţi valoarea expresiei $E(x)=x+x^2+x^3+x^4+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}$

(4p)

SOLUTIE

Obţinem succesiv: $x^2+\dfrac{1}{x^2}=98$; $x^3+\dfrac{1}{x^3}=970$; $x^4+\dfrac{1}{x^4}=9602$ ……………………..

(3p)

E(x) = 10 + 98 + 970 + 9602 = 10680 ……………………..

(1p)

2. Determinaţi n∈ N* – {1}astfel încât numărul $a=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$ să fie element al mulţimii $A=\left\{x\in R/|x|<\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right\}$.

…………………………….. **(7p)**

SOLUTIE

$\sqrt{11-6\sqrt{2}}=3-\sqrt{2}$ ……………………..

(2p)

$-3+\sqrt{2}<x<3-\sqrt{2}$ şi cum x este număr real $\Rightarrow A=(-3+\sqrt{2};3-\sqrt{2})$ ……………………..

(2p)

$a=\frac{\sqrt{2}-1}{1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{1}+...+\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{1}$ ……………………..
(1p)

$a=\sqrt{n}-1\in(-3+\sqrt{2};3-\sqrt{2})\Rightarrow\sqrt{n}<4-\sqrt{2}$, dar $n\in N^*-\{1\}\Rightarrow n\in\{2;3;4;5\}$ …………..
(2p)

3. Triunghiurile ABC şi ADE sunt în plane diferite şi au mediana AM comună. Considerăm punctele P, Q, R, S situate respectiv pe segmentele [AB], [AD], [AC], [AE] astfel încât $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QD}=\frac{AR}{RC}=\frac{AS}{SE}$.

a) Să se arate că PRQS este paralelogram. …………………………..
(3p)

b) Dacă $AB^2+AC^2=AD^2+AE^2$, atunci PRQS este dreptunghi. ....
(4p)

SOLUTIE

a) AM mediană comună $\Rightarrow$ MD = ME şi MB = MC $\Rightarrow$ BDCE paralelogram

$\Rightarrow$ BD || CE şi BE || DC ……………..
(1p)

$\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QD}\Rightarrow$ PQ || BD. Analog, QR || CD, SR || EC, SP || BE $\Rightarrow$ PQ || SR, QR || SP $\Rightarrow$ PQRS parallelogram ……………..
(2p)

b) Aplicăm teorema medianei în triunghiurile ABC şi ADE şi obţinemn:

$AM^2=\frac{2(AB^2+AC^2)-BC^2}{4}$ şi $AM^2=\frac{2(AD^2+AE^2)-DE^2}{4}$ ……………..
(2p)

Cum $AB^2+AC^2=AD^2+AE^2\Rightarrow BC=DE$

Dar BDCE paralelogram $\Rightarrow$ BDCE dreptunghi ……………..
(2p)

4. Fie triunghiul dreptunghic ABC (m<A) = 90^0) cu AB = 30 cm, AC = 40 cm. În punctul A se ridică perpendiculara AM pe planul (ABC), AM = 24 cm.

a) Determinaţi măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele (MBC) şi (ABC)
(4p)

b) Arătaţi că piciorul perpendicularei din A pe planul (MBC) este ortocentrul triunghiului MBC.
(3p)

SOLUTIE

a) Dacă AD $\perp$ BC, conform T_{3p} avem că MD $\perp$ BC şi m(<(MBC), (ABC)) = m(<MDA) …….
(2p)

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Piteşti, Jud. Argeş,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

Se calculează AD = 24 cm şi cum AM = 24 cm $\Rightarrow m(\sphericalangle MDA) = 45^0$ .... (2p)

b) Fie $H \in MD$ astfel încât $AH \perp MD$ şi conform R_2T_{3p}

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AH \perp (MBC) \\ MB \subset (MBC)\end{array}\right\} \Rightarrow MB \perp AH \\ \left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AC \perp AB \\ AC \perp AM\end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp (MBA) \\ MB \subset (MBA)\end{array}\right\} \Rightarrow MB \perp AC\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow MB \perp (ACH) \\ CH \subset (ACH)\end{array}\right\} \Rightarrow CH \perp MB \\ MD \perp BC \\ H \in MD\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ H ortocentrul Δ MBC ....