

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ - 16 februarie 2013

Clasa a XI-a

VARIANTA 3

BAREM DE CORECTARE:

$$1. \left. \begin{array}{l} \det A \cdot \det B = \det(A \cdot B) \\ \det(B \cdot A) = \det B \cdot \det A \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1p \\ 1p \end{array} \Rightarrow xy = 200 \quad (1p)$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) \Rightarrow x + y = 30 \quad (2p)$$

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ xy = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 10 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \end{cases} \quad (2p)$$

2. a) Dem prin inducție (2p)

$$b) \text{ Notăm } x_n = \frac{f_{n+1}^2}{f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2} \quad (1p)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad (1p)$$

$$\text{Calcul } \frac{x_{n+1}}{x_n} \quad (1p)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \quad (2p)$$

SUBIECTUL 3 :

$$x_n > n-2, n \geq 3, \text{inducție } x_3 = \sqrt{3} > 1 \text{ și } x_4 = \sqrt{1+3\sqrt{3}} > 2, P(k-1) \text{ si } P(k) \Rightarrow P(k+1) \dots \dots \dots 2p$$

$$x_n < n-1, n \geq 3 \text{ inducție } x_3 = \sqrt{3} < 2 \dots \text{ și } x_4 = \sqrt{1+3\sqrt{3}} < 3, P(k-1) \text{ si } P(k) \Rightarrow P(k+1) \dots \dots 2p$$

$$n-2 < x_n < n-1, \Rightarrow x_n \notin N, n \geq 3 \Rightarrow A \cap N = \{1,2\} \dots \dots \dots 1p$$

$$\frac{n-2}{n} \leq x_n \leq \frac{n-1}{n} \dots \dots \dots 1p$$

$$\text{Finalizare, (criteriul clestelui,)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 1 \dots \dots \dots 1p$$

SUBIECTUL 4:

Inmulțește la stânga și la dreapta cu X și obține  $AX = XA$ .....1p

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 2b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad a, b, c \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots 1p$$

$$X = aI_3 + B, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^k = O_3, k \geq 3 \dots\dots\dots 1p$$

$$X = a^n I_3 + n a^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} B^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$a^n - a = 0, b(na^{n-1} - 1) = 1, nc a^{n-1} + n(n-1)a^{n-2} b^2 - c = k, a, b, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a=0, b=-1, c=-k \dots 2p$$

$$\text{Finalizare } X = \begin{pmatrix} 0 & \dots & -1 & \dots & -k \\ 0 & \dots & 0 & \dots & -2 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$$