COLEGIUL NAȚIONAL „UNIREA”

Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea

Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

Concursul Interjudețean de Matematică „UNIREA”
Focşani, 23 februarie 2013

Clasa a XI-a

Subiectul 1. Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, definit prin $x_0 = 1$, $x_{n+1} = 3x_n + \sqrt{8x_n^2 - 7}$, $n \geq 0$.

a) Să se arate că $x_n \in \mathbb{N}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

b) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$;

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{6^n}$.

Soluție:

a) $x_{n+1} - 3x_n = \sqrt{8x_n^2 - 7} \Rightarrow x_{n+1}^2 - 6x_{n+1}x_n + x_n^2 = -7$ şi $x_{n+2}^2 - 6x_{n+2}x_{n+1} + x_{n+1}^2 = -7$

Atunci $x_{n+2}^2 - x_n^2 - 6x_{n+1}(x_{n+2} - x_n) = 0$ şi din $(x_n)_{n\geq 0}$ strict crescător se obține

$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n$, de unde prin inducție se obține $x_n \in \mathbb{N}$ **(3p)**

b) Din $(x_n)_{n\geq 0}$ strict crescător rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$

Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ atunci $-2\alpha = \sqrt{8\alpha^2 - 7}$ fals ($\alpha > 0$)

Deci $\alpha = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 3 + \sqrt{8 - \frac{7}{x_n^2}} = 3 + \sqrt{8}$ **(2p)**

c) $x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n \Rightarrow x_n = a(3-\sqrt{8})^n + b(3+\sqrt{8})^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{6^n} = \lim\limits_{n\to\infty} a\left(\frac{3-\sqrt{8}}{6}\right)^n + b\left(\frac{3+\sqrt{8}}{6}\right)^n$ **(2p)**

Subiectul 2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că există $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ atunci oricare ar fi $x_0 \in \mathbb{R}$ există $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Soluție:

$x = y = 0 \Rightarrow f(0) \in \{0,1\}$

Dacă $f(0) = 0 \Rightarrow f(x+0) = f(x)\cdot f(0) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ **(2p)**

Dacă $f(0) = 1$ presupunem că există $y \in \mathbb{R}$ cu $f(y) = 0$

$f(x) = f(x-y+y) = f(x-y)\cdot f(y) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ Fals

$=> f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ **(2p)**

$1 = f(0) = f(x-x) = f(x)\cdot f(-x) => f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$

Fie $a_n \to 0 => a_n + \alpha \to \alpha$

$1 = f(a_n) = f(a_n + \alpha - \alpha) = \dfrac{f(a_n+\alpha)}{f(\alpha)} \to \dfrac{l}{f(\alpha)} => \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{l}{f(\alpha)}$

Deci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x-x_0)\cdot f(x_0) = \dfrac{l}{f(\alpha)}\cdot f(x_0)$ **(3p)**

Subiectul 3. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ cu $\det(A) = 0$ şi A^* adjuncta matricei A. Să se arate că:

a) $rang(A^*) \leq 1$;

b) dacă există $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ astfel ca $(A^*)^m = 0_n$ atunci $(A^*)^2 = 0_n$.

Soluție:

a) $A\cdot A^* = (\det A)\cdot I_n => A\cdot A^* = 0_n$

Folosind inegalitatea lui Sylvester rezultă $0 = rang(A\cdot A^*) \geq rang(A) + rang(A^*) - n$

Dacă $rang(A) \leq n-2$ atunci toți minorii de $n-1$ordin sunt 0 şi $A^* = 0_n => rang(A^*) = 0$

Dacă $rang(A) = n-1 => 0 \geq n-1+rang(A^*) - n => rang(A^*) \leq 1$

$rang(A) = n-1 => rang(A^*) \geq 1$ şi atunci $rang(A^*) = 1$ **(3p)**

b) $rang(A^*) \leq 1 =>$ există o matrice coloană C şi o matrice linie L astfel încât $A^* = C\cdot L$

$0_n = (A^*)^m = (C\cdot L)^m = C\cdot (L\cdot C)^{m-1}\cdot L = a\cdot C\cdot L = a\cdot (A^*)$

Atunci $a = 0$ sau $A^* = 0_n$ de unde rezultă că $(A^*)^2 = 0_n$ **(4p)**

Subiectul 4. Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea $AA^t = I_n$. Să se arate că $\left|\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}\right| \leq n$.

Soluție:

Dacă $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ atunci $L\cdot L^t = (n)$

Deci $(n) = L\cdot L^t = L\cdot A\cdot A^t\cdot L^t = (L\cdot A)\cdot(L\cdot A)^t = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = (c_1^2$

$= c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2)$, unde $c_i = a_{1i} + a_{2i} + \dots + a_{ni}$ **(3p)**

$=> n = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 \geq \dfrac{1}{n}(c_1 + c_2 + \dots + c_n)^2$

$=> |c_1 + c_2 + \dots + c_n| \leq n => \left|\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}\right| \leq n$ **(4p)**