

S.S.M.R - FILIALA MUREȘ

Olimpiada de matematică
Faza locală 9.02.2013
Barem de corectare
Clasa a XII-a
Problema 1

Calculati: $\int \frac{1}{x(x^{2012} + 2013)} dx, x > 0.$

Gazeta matematică

$$\text{Solutie: } \int \frac{1}{x(x^{2012} + 2013)} dx = \frac{1}{2013} \int \frac{2013 + x^{2012} - x^{2012}}{x(x^{2012} + 2013)} dx = \quad (2p)$$

$$= \frac{1}{2013} \int \frac{2013 + x^{2012}}{x(x^{2012} + 2013)} - \frac{x^{2012}}{x(x^{2012} + 2013)} dx = \quad (1p)$$

$$= \frac{1}{2013} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x^{2011}}{x^{2012} + 2013} \right) dx = \quad (1p)$$

$$= \frac{1}{2013} \left(\ln x - \frac{1}{2012} \ln(x^{2012} + 2013) \right) + C. \quad (2p)$$

Din oficiu: 1 p**Problema 2**

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea:

$$G = \left\{ X_a \in M_2(\mathbf{R}) \mid X_a = I_2 + aA, a > -\frac{1}{2} \right\}.$$

a) Arătați că G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea. Stabiliti, apoi, că (G, \cdot) este grup abelian.

b) Demonstrați că funcția $f: G \rightarrow \mathbf{R}, f(X_a) = \ln(2a+1)$ este izomorfism între grupurile (G, \cdot) și $(\mathbf{R}, +)$.

c) Calculați $X_{\frac{1}{2}} \cdot X_{\frac{3}{2}} \cdot \dots \cdot X_{\frac{2n-1}{2}} (n \in \mathbf{N}^*).$

$$\text{Solutie: a) } X_a, X_b \in G, a, b > -\frac{1}{2}.$$

$$X_a \cdot X_b = I_2 + aA + bA + abA^2 = I_2 + (a+b+2ab)A = X_{a+b+2ab} \quad (1)$$

$$a + b + 2ab > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (2a + 1)(2b + 1) > 0 \text{ adevărat, } \forall a, b > -\frac{1}{2} \quad (2)$$

Din (1) și (2) $\Rightarrow G$ este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea. (1p)

Se verifică axiomele grupului:

G_1) Ținând cont că G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbf{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor, iar înmulțirea în $M_2(\mathbf{R})$ este asociativă, deducem că și înmulțirea în G este asociativă; (0,25p)

G_2) Întrucât $X_a \cdot X_b = X_{a+b+2ab} = X_{b+a+2ba} = X_b \cdot X_a$, oricare ar fi $X_a, X_b \in G$, rezultă că înmulțirea în G este comutativă; (0,25p)

G_3) Cum $I_2 = X_0 \in G$, rezultă că I_2 este elementul neutru pentru înmulțirea în G ; (0,25p)

G_4) $\forall X_a \in G, \exists (X_a)^{-1} = X_{a'} \in G$, astfel încât $X_a X_{a'} = I_2$.

$$X_a X_{a'} = I_2 \Leftrightarrow X_{a+a'+2aa'} = X_0 \Leftrightarrow a' = -\frac{a}{1+2a} > -\frac{1}{2}. \text{ Deci, } X_{a'} = X_{\frac{a}{1+2a}} \in G, \text{ ceea ce arată că}$$

orice element din G este inversabil. (1p)

Din G_1)- G_4) $\Rightarrow (G, \cdot)$ este grup abelian.

b)

Injectivitatea: Fie $X_a, X_b \in G$ astfel încât $f(X_a) = f(X_b) \Rightarrow \ln(2a+1) = \ln(2b+1) \Rightarrow a = b \Rightarrow X_a = X_b$. Prin urmare funcția f este injectivă. (0,25p)

Surjectivitatea: $\forall b \in \mathbf{R}, \exists X_a \in G$ astfel încât $f(X_a) = b \Leftrightarrow a = \frac{e^b - 1}{2} > -\frac{1}{2}$.

Deci $\exists X_a = X_{\frac{e^b - 1}{2}} \in G$ astfel încât $f(X_a) = b$. (0,5p)

Morfismul: $f(X_a \cdot X_b) = f(X_{a+b+2ab}) = \ln(4ab + 2a + 2b + 1) = \ln(2a+1)(2b+1) = \ln(2a+1) + \ln(2b+1) = f(X_a) + f(X_b), \forall X_a, X_b \in G$. (0,5p)

Deci f este izomorfism între grupurile (G, \cdot) și $(\mathbf{R}, +)$.

$$c) X_a \cdot X_b = X_{a+b+2ab} = X_{2\left(a+\frac{1}{2}\right)\left(b+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}$$

Se demonstrează prin inducție matematică relația:

$$X_{a_1} \cdot X_{a_2} \cdot \dots \cdot X_{a_n} = X_{2^{n-1}\left(a_1+\frac{1}{2}\right)\left(a_2+\frac{1}{2}\right)\dots\left(a_n+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}}$$

$$\text{Atunci } X_{\frac{1}{2}} \cdot X_{\frac{3}{2}} \cdot \dots \cdot X_{\frac{2n-1}{2}} = X_{\frac{2^n \cdot n! - 1}{2}} \quad (2p)$$

Obs. Se poate folosi și punctul b)

Din oficiu: 1 p

Problema 3

$$\text{Calculați: } \int \frac{x+1-x^2 \cdot \ln x}{x^3+x^2} \cdot \cos[\ln(x+1)] dx, x > 0.$$

Soluție:

$$\int \frac{x+1-x^2 \cdot \ln x}{x^2(x+1)} \cdot \cos[\ln(x+1)] dx = \int \frac{1}{x^2} \cdot \cos[\ln(x+1)] dx - \int \frac{\ln x}{x+1} \cdot \cos[\ln(x+1)] dx = \quad (1p)$$

Pentru orice altă rezolvare corectă se acordă punctaj maxim

$$= \int \left(-\frac{1}{x}\right)' \cdot \cos[\ln(x+1)] dx - \int \ln x \cdot [\sin \ln(x+1)]' dx = \quad (1p)$$

$$= -\frac{1}{x} \cdot \cos[\ln(x+1)] - \int \frac{1}{x} \cdot \sin \ln(x+1) \cdot \frac{1}{x+1} dx -$$

$$- \ln x \cdot \sin \ln(x+1) + \int \frac{1}{x} \cdot \sin \ln(x+1) dx = \quad (1p)$$

$$= -\frac{1}{x} \cdot \cos[\ln(x+1)] - \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \cdot \sin \ln(x+1) dx -$$

$$- \ln x \cdot \sin \ln(x+1) + \int \frac{1}{x} \cdot \sin \ln(x+1) dx = \quad (1p)$$

$$= -\frac{1}{x} \cdot \cos[\ln(x+1)] - \int \frac{1}{x} \cdot \sin \ln(x+1) dx + \int \frac{1}{x+1} \cdot \sin \ln(x+1) dx -$$

$$- \ln x \cdot \sin \ln(x+1) + \int \frac{1}{x} \cdot \sin \ln(x+1) dx = \quad (1p)$$

$$= -\frac{1}{x} \cdot \cos[\ln(x+1)] - \cos[\ln(x+1)] - \ln x \cdot \sin[\ln(x+1)] + C \quad (1p)$$

Din oficiu: 1 p

Problema 4

Determinati primitivele functiei $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$ primitivabilă, care verifică relati
 $f(x) \sin x - f(\pi - x) = \cos^2 x, \forall x \in [0, \pi]$.

Solutie:

Din relati din enunt, pentru $x := \pi - x$, deducem: $f(\pi - x) \sin x - f(x) = \cos^2 x$. (1) (1p)

Din relati din enunt, prin înmulțire cu $\sin x$ deducem:

$$f(x) \sin^2 x - f(\pi - x) \sin x = \sin x \cos^2 x. \quad (2) \quad (1p)$$

$$\text{Adunând (1) și (2), deducem } [1 + \sin x + f(x)] \cdot \cos^2 x = 0. \quad (3) \quad (1p)$$

Din (3), obținem:

$$\text{Caz 1. } \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}. \text{ Din relati din ipoteză se obtine } f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a. \quad (0,5p)$$

$$\text{Caz 2. Pentru } x \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}, 1 + \sin x + f(x) = 0. \quad (0,5p)$$

$$\text{Astfel: } f(x) = \begin{cases} -1 - \sin x, & x \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \\ a, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}, a \in \mathbf{R}. \quad (0,5p)$$

Dacă $a \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}$, f are punct de discontinuitate de speta I în $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f$ nu are proprietatea lui Darboux și deci f nu admite primitive. (0,5p)

Conform enuntului, f admite primitive și deci $a = -2$ și prin urmare, $f(x) = -1 - \sin x$ pentru orice $x \in [0, \pi]$ și deci $F(x) = -x + \cos x + C$. (1p)

Din oficiu: 1 p

Pentru orice altă rezolvare corectă se acordă punctaj maxim