COLEGIUL NAȚIONAL „UNIREA”
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

Concursul Interjudețean de Matematică „UNIREA”
Focşani, 23 februarie 2013

Clasa a XII-a

Subiectul 1. Fie G un grup şi H un subgrup propriu al său cu proprietatea că există $a \in G - H$ astfel încât $H \cup \{a, a^{-1}\}$ este de asemenea un subgrup în G. Determinați ordinul lui a.

Soluție:

Fie $x \in H - \{e\} => ax \in H \cup \{a, a^{-1}\}$

Dacă $ax \in H => a = (ax)x^{-1} \in H$ imposibil

Dacă $ax = a => x = e$ imposibil

Dacă $ax = a^{-1} => x = a^{-2} => H - \{e\} = \{a^{-2}\}$ **(4p)**

Prin urmare $H \cong Z_2$ şi $x^2 = e => a^{-4} = e => ord(a) \mid 4$

Cum $a^2 \neq e$ (H este subgrup propriu) $ord(a) = 4$ **(3p)**

Subiectul 2. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel şi $a, b \in A$. Dacă este $1 + a \cdot b$ inversabil atunci şi $1 + b \cdot a$ este inversabil.

Soluție:

Fie u inversul lui $1 + a \cdot b$ $<=> u + u \cdot a \cdot b = u + a \cdot b \cdot u = 1$ **(2p)**

Notăm $v = 1 - b \cdot u \cdot a$ şi arat că $(1 + b \cdot a)^{-1} = v$ **(2p)**

$$(1+b\cdot a)\cdot v = (1+b\cdot a)\cdot(1-b\cdot u\cdot a) = 1 - b\cdot u\cdot a + b\cdot a - b\cdot a\cdot b\cdot u\cdot a =$$
$$= 1 - b\cdot u\cdot a + b\cdot a - b\cdot(1-u)\cdot a = 1$$
$$v\cdot(1+b\cdot a) = (1-b\cdot u\cdot a)\cdot(1+b\cdot a) = 1 + b\cdot a - b\cdot u\cdot a - b\cdot u\cdot a\cdot b\cdot a =$$
$$= 1 + b\cdot a - b\cdot u\cdot a - b\cdot(1-u)\cdot a = 1$$ **(3p)**

Subiectul 3. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt[n^2]{\prod_{k=1}^{n} k^k}$.

Soluție: $\frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt[n^2]{\prod_{k=1}^{n} k^k} = \sqrt[n^2]{\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^k} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt[n^2]{n^{\frac{n(n+1)}{2}}} = \sqrt[n^2]{\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^k} \cdot n^{\frac{1}{2n}} = a_n \cdot n^{\frac{1}{2n}}$ **(2p)**

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2n}} = 1$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt[n^2]{\prod_{k=1}^{n} k^k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ **(1p)**

$\ln a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\frac{k}{n} = \sigma_\Delta(f,\xi)$, unde $\Delta = \left(0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,1\right)$ şi $\xi = \left(\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,1\right)$, iar

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x\ln x, x>0 \\ 0, x=0 \end{cases}$ funcție continuă **(2p)**

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n = \int_0^1 f(x)dx$

O primitivă a lui *f* este $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}, x>0 \\ 0, x=0 \end{cases}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n = \int_0^1 f(x)dx = -\frac{1}{4}$

Aşadar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ **(2p)**

Subiectul 4. Determinați funcția continuă $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ cu proprietățile:

(1) limita $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^x yf(y)dy$ există şi este finită;

(2) $\int_0^x yf(y)dy \le \min\limits_{y\in[x,2x]} f(y)$, pentru orice $x>0$.

Soluție:

Fie funcția $F:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, $F(x) = \int_0^x yf(y)dy$

Atunci $F(2x)-F(x) = \int_x^{2x} yf(y)dy \ge x\cdot\min\limits_{y\in[x,2x]} yf(y) \ge x^2\cdot\min\limits_{y\in[x,2x]} f(y)$ şi de aici

$F(2x)-F(x) \ge x^2\cdot\min\limits_{y\in[x,2x]} f(y) \ge x^2\cdot F(x)$ <=> $F(2x)\ge(x^2+1)\cdot F(x)$,

Prin inducție se obține $F(2^n x)\ge(x^2+1)^n\cdot F(x)$ <=> $\frac{F(2^n x)}{(x^2+1)^n}\ge F(x)$ **(3p)**

Trecând la limită, folosind (1), obținem $F(x)=0, \forall x>0$

Presupunem că există $x>0$ astfel încât $f(x)>0$ şi atunci există $V=(a,b)$ astfel ca $0<a<x<b$ şi $f(x)>0$, $\forall x\in[a,b]$ => $0<\int_a^b tf(t)dt = F(b)-F(a)=0$, fals!

Deci $f(x)=0, \forall x>0$ **(2p)**

Alegând un şir cu termeni strict pozitivi convergent la 0 şi folosind continuitatea lui *f* se obține $f(0)=0$ **(2p)**