COLEGIUL NAȚIONAL
„UNIREA”
Str. Cezar Bolliac, Nr. 15, Focşani, Vrancea
Tel / Fax: 0040 237 215659; e-mail: cnu@lufo.ro; http://unireamat.lufo.ro/

Concursul Interjudețean de Matematică „UNIREA”
Focşani, 23 februarie 2013

Clasa a VII-a

Subiectul 1. a) Dacă a, b, c sunt numere nenule cu $\frac{2b-c}{a}=\frac{2c-a}{b}=\frac{2a-b}{c}$, calculați $E=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$.

b) Să se arate că oricare ar fi n număr natural prim cu 10, există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât n divide a, unde $a = 20132013...2013$, 2013 de p ori.

Soluție:

a) Dacă $a+b+c=0 \Rightarrow E=-1$ **(1p)**

Dacă $a+b+c \neq 0 \Rightarrow a=b=c \Rightarrow E=8$ **(3p)**

b) Fie $a_1 = 2013$, $a_2 = 20132013$, …, $a_{n+1} = 20132013...2013$ (de $n+1$ ori)

La împărțirea la n măcar două dintre numere dau acelaşi rest şi atunci există $i > j$ astfel încât $n \mid a_i - a_j = 2013...20130000...0000 = a_{i-j} \cdot 10^j$ **(2p)**

Cum $(n,10)=1$ rezultă că $n \mid a_{i-j}$ **(1p)**

Subiectul 2. Determinați numerele naturale distincte două câte două $a_1, a_2, ..., a_7$ pentru care $a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + ... + a_7^4 = 1^4 + 3^4 + 5^4 + ... + 13^4$.

Soluție:

Restul împărțirii unui pătrat perfect la 8 este 0, 4, 1 şi de aici restul împărțirii lui a^4 este 0 (dacă *a* este par) sau 1 (dacă *a* este impar) **(2p)**

Aşadar $1^4 + 3^4 + 5^4 + ... + 13^4$ dă restul 7 la împărțirea la 8 **(2p)**

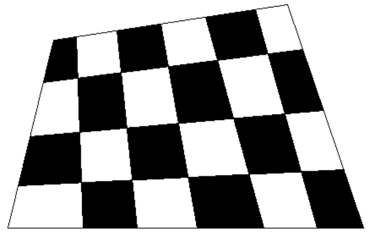
$a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + ... + a_7^4$ dă restul *k* la împărțirea la 8, unde *k* este numărul de impare

Deducem că toate $a_1, a_2, ..., a_7$ sunt impare şi cum sunt distincte două câte două, ele sunt „minim” 1, 3, 5, …, 13. **(2p)**

Atunci $\{a_1, a_2, ..., a_7\} = \{1, 3, 5, ..., 13\}$ **(1p)**

Subiectul 3. a) Se dau punctele $M_1, M_2, ..., M_{2013} \in d_1$ şi $N_1, N_2, ..., N_{2013} \in d_2$ astfel încât $M_{k-1}M_k = M_kM_{k+1}$ şi $N_{k-1}N_k = N_kN_{k+1}$ oricare ar fi $k = 2, 3, ..., 2012$. Să se arate că mijloacele segmentelor M_kN_k, $k = 1, 2, 3, ..., 2013$ sunt coliniare.

b) Suprafaţa pe care se desfăşoară un joc are forma unui patrulater oarecare cu laturile opuse împărțite în 6, respectiv 4 segmente congruente şi colorată în alb şi negru. Să se arate că suprafaţa "albă" este egală cu suprafaţa "neagră".



Soluție:

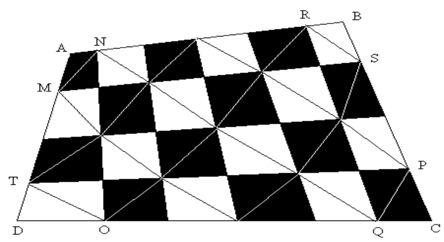
a) Fie A, B, C mijloacele segmentelor M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3

AM_2CN_2 este paralelogram de centru B şi atunci A, B, C sunt coliniare

De aici, procedând similar se obține concluzia **(3p)**

b)

Din a) punctele de intersecție sunt mijloace obținându-se 8 paralelograme colorate echivalent, 6 triunghiuri colorate echivalent şi cele 4 triunghiuri din colțuri cu



$$S_{AMN} + S_{CPQ} = \frac{1}{24}(S_{ABD} + S_{BDC}) = \frac{1}{24}S_{ABCD} = S_{BRS} + S_{DOT}$$ **(4p)**

Subiectul 4. Se dă trapezul $ABCD$ cu baza mare (AB). Fie $M \in (AB)$, $P \in (AD)$, $S \in (BC)$ astfel încât $MP \parallel BD$ şi $MS \parallel AC$. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$ şi $PS \cap OM = \{E\}$ să se arate că:

a) triunghiurile AOD şi BOC au aceeaşi arie;

b) $EP = ES$.

Soluție:

a) $S_{ADB} = S_{ACB} = \frac{1}{2}AB \cdot h$

$S_{AOD} = S_{ADB} - S_{AOB} = S_{ACB} - S_{AOB} = S_{BOC}$ **(2p)**

b) Fie $PT \parallel AC$

Punctele M, O, T sunt coliniare **(3p)**

$PMST$ este paralelogram şi atunci $EP = ES$ **(2p)**