COLEGIUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ
Piatra Neamț, Neamț, România, Str. Mihai Viteazu, nr. 12; 610226
Tel/Fax: 00 40 233 227 510; 227 529; 223 252.
http://cni.nt.edu.ro e-mail: cni_pn@yahoo.com

Concursul „PROSOFT@NT”
concurs înscris în calendarul M.E.N.
al concursurilor regionale şcolare
organizate în anul şcolar 2012-2013,
fără finanțare M.E.N., concurs
cu participare internațională
21 februarie 2013

Concurs de matematică – proba individuală

BAREM DE CORECTARE
clasa a VII-a

1. a) Dacă $a+b=2$ demonstraţi că $ab\le 1$ cu $a,b\in\mathbb{R}$.
b) Determinaţi valoarea minimă a sumei:
$$S=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}+\cdots+\sqrt{(x-2014)^2}$$

Soluție

a)

Din $a+b=2$ avem $a-1=1-b\Longrightarrow a-1=-(b-1)$ (**1p**);
$a-1$ *și* $b-1$ au semne diferite (**1p**);
$(a-1)(b-1)\le 0\Longrightarrow ab-a-b+1\le 0$ (**1p**);
Finalizare: $ab-2+1\le 0\Longrightarrow ab\le 1$ (**1p**).

b)

$S=|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-2014|$
$|x-1|+|x-2014|=|x-1|+|2014-x|\ge|x-1+2014-x|=2013$
$|x-2|+|x-2013|=|x-2|+|2013-x|\ge|x-2+2013-x|=2011$
. . .
$|x-1007|+|x-1008|=\cdots=1$ (**2p**);
Calcularea sumei şi finalizarea:
$S\ge 1007^2$; deci $\min S=1007^2$ (**1p**).

2. Câte soluţii în $\mathbb{N}^*$ are ecuaţia:
a. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$
b. Să se dea un mod de rezolvare.
Pentru $x\ne y$ soluţiile (x,y) *și* (y,x) sunt considerate distincte.

Soluție

a. Dacă x şi y sunt numere naturale nenule este necesar ca $x>12$ *și* $y>12$. Dacă de exemplu $x\le 12$ atunci $\frac{1}{12}-\frac{1}{x}\le 0$ adică $\frac{1}{y}\le 0$ ceea ce nu se poate. (**1p**);
Ecuaţia se transformă în ecuaţiile echivalente:
$12x+12y=xy;\ 12x-xy+12y=0;\ 12x-144-xy+12y+144=0$
$12(x-12)-y(x-12)=-144;\ (x-12)(y-12)=144\ \Leftrightarrow$
$(x-12)(y-12)=2^4\cdot 3^2$ (**2p**);
Cum $x-12$ şi $y-12$ sunt numere naturale înseamnă că fiecare este un divizor al lui $2^4\cdot 3^2$ care sunt în număr de $(4+1)(2+1)=15$. Deci ecuaţia are 15 soluţii. (**2p**);

b. Fie d un divizor al lui 144. Atunci $x-12=d;\ y-12=\frac{144}{d}$, de unde: $x=12+d;\ y=12+\frac{144}{d}$. Cum d ia 15 valori distincte înseamnă că obţinem efectiv 15 soluţii pentru ecuaţia dată. (**2p**).

COLEGIUL NAȚIONAL DE INFORMATICĂ
Piatra Neamț, Neamț, România, Str. Mihai Viteazu, nr. 12; 610226
Tel/Fax: 00 40 233 227 510; 227 529; 223 252.
http://cni.nt.edu.ro e-mail: cni_pn@yahoo.com

3. Se dă un triunghi *ABC* și un punct *M* în interiorul lui. Dreptele *AM*, *BM*, *CM* taie laturile opuse în punctele *D*, *E*, *F*. Să se demonstreze că: $\frac{MD}{AD}+\frac{ME}{BE}+\frac{MF}{CF}=1$.

Soluție

$\frac{\mathcal{A}_{MAB}}{\mathcal{A}_{ABC}}+\frac{\mathcal{A}_{MBC}}{\mathcal{A}_{ABC}}+\frac{\mathcal{A}_{MCA}}{\mathcal{A}_{ABC}}=1$ (**1p**);

$AA' \perp BC; MM' \perp BC \Rightarrow \frac{\mathcal{A}_{MBC}}{\mathcal{A}_{ABC}}=\frac{MM'}{AA'}$ (**1p**);

$\Delta AA'D \sim \Delta MM'D \Rightarrow \frac{MM'}{AA'}=\frac{MD}{AD} \Rightarrow \frac{\mathcal{A}_{MBC}}{\mathcal{A}_{ABC}}=\frac{MD}{AD}$ (**2p**);

Analog $\frac{\mathcal{A}_{MAB}}{\mathcal{A}_{ABC}}=\frac{MF}{CF}; \frac{\mathcal{A}_{MCA}}{\mathcal{A}_{ABC}}=\frac{ME}{BE}$ (**2p**).

Finalizare $\frac{MD}{AD}+\frac{ME}{BE}+\frac{MF}{CF}=1$. (**1p**).

4. Fie triunghiul *ABC* cu *AB* < *BC* și $E \in (AC)$ astfel încât $\frac{1}{AE}-\frac{1}{AC}=\frac{BC}{AB\cdot AC}$. Dreapta ce conține bisectoarele unghiurilor exterioare din *B* intersectează pe *AC* în *S* și mediatoarea laturii $[AC]$ în *P*.

a) Dacă *M* este mijlocul lui $[AC]$ și $PM \cap BE = \{G\}$, arătați că *EP* și *SG* sunt perpendiculare.

b) Dacă $CP \cap AB = \{L\}$ și $AP \cap CB = \{T\}$, demonstrați că punctele *L*, *T* și *M* sunt necoliniare.

Soluție

a) Relația $\frac{1}{AE}-\frac{1}{AC}=\frac{BC}{AB\cdot AC} \Leftrightarrow \frac{EC}{AE}=\frac{BC}{AB} \Rightarrow [BE$ este bisectoarea $\sphericalangle ABC$ (**1p**);

$BE \perp BS$ (**1p**);

E ortocentrul ΔSPG (**1p**);

$EP \perp SG$ (**1p**);

b) Presupunem că punctele *L*, *T*, *M* sunt coliniare și $AP \cap BC \cap LM = \{T\}$ (**1p**);

Teorema lui Ceva în ΔALC: $\frac{LP}{PC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AB}{BL}=1$ (**1p**);

Folosind $CM = MA$ și reciproca teoremei lui Thales $\Rightarrow BP \parallel AC$ (fals) (**1p**).