INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 9 februarie 2013

clasa a IX-a

SUBIECTUL I

Să se rezolve ecuația $\frac{x-2}{x}+\frac{x-4}{x}+\frac{x-6}{x}+......+\frac{2}{x}=12$

(propusă de prof. Sîrb Vasile C.T. „A.P.I.” Zalău)

Barem de corectare
punem condiția $x \neq 0$.
Suma din membrul stâng are termenii în progresie aritmetică cu rația $r=\frac{-2}{x}$ 2p
Din formula termenului general $a_n=a_1+(n-1)\cdot r$ obținem $n=\frac{x-2}{2}$ 2p
Din suma $S_n=\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$ avem: $12=\frac{\left(\frac{x-2}{x}+\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{x-2}{2}}{2}$ sau $12=\frac{x-2}{4}$ 2p
de unde $x=50$ 1p

SUBIECTUL II

Fie mulțimile $A=\{x\in R \mid x^2+p_1x+q_1=0,\ p_1,q_1\in R\}$ şi $B=\{x\in R \mid x^2+p_2x+q_2=0,\ p_2,q_2\in R\}$ unde $p_1\cdot p_2=2(q_1+q_2)$. Să se arate că reuniunea celor două mulțimi este nevidă.

Selectată de prof. Bara Lajos din probleme OM, 1982

Barem de corectare

$A\cup B=\varnothing \Leftrightarrow \Delta_1<0,\Delta_2<0 \Rightarrow \Delta_1+\Delta_2<0$ 1 punct

$\Delta_1=p_1^2-4\cdot q_1$ 1 punct

$\Delta_2=p_2^2-4\cdot q_2$ 1 punct

$\Delta_1+\Delta_2=p_1^2+p_2^2-4\cdot(q_1+q_2)=p_1^2-2\cdot p_1\cdot p_2+p_2^2=(p_1-p_2)^2\geq 0$, 3 puncte

Prin urmare : $A\cup B\neq\varnothing$. 1 punct

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059

Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,

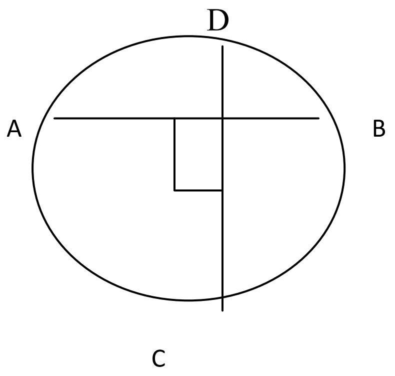
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

SUBIECTUL III

Dacă $[AB]$ şi $[CD]$ sunt două coarde perpendiculare ale cercului C (O, R) şi $AB \cap CD = \{P\}$, arătaţi că $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}$.

selectat de prof. Fărcaş Nicolae (C.N.S.) din culegere de probleme



$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OD}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ 2 puncte

Fie M mijlocul lui $[AB]$ şi N mijlocul lui $[CD]$, atunci
$OM \perp AB$, $ON \perp DC$ şi din ipoteză $AB \perp CD$ 2 puncte

$\Rightarrow$ $ONPM$ dreptunghi $\Rightarrow$ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$
şi $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON}$ 1 punct

Atunci: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO} + 2\left(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}\right) = 4\overrightarrow{PO} + 2\overrightarrow{OP} =$
$= 4\overrightarrow{PO} - 2\overrightarrow{PO} = 2\overrightarrow{PO}$ 2 puncte

SUBIECTUL IV

Fie x, y, z numere reale strict pozitive cu proprietatea că $x+y+z \geq \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

Să se arate că:

$$\frac{x+y+1}{x+y+z^2}+\frac{y+z+1}{y+z+x^2}+\frac{z+x+1}{z+x+y^2} \leq 3.$$

26612./ Gazeta de Matematică Nr. 5/2012

Barem de corectare

Rescriem inegalitatea cerută astfel:

$$\frac{z^2-1}{x+y+z^2}+\frac{y^2-1}{x+z+y^2}+\frac{x^2-1}{y+z+x^2} \geq 0$$ 2 puncte

$$\Leftrightarrow \quad \sum \frac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{y+z}{x}} \geq 0$$ 1 punct

Arătăm că

$$\frac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{y+z}{x}} \geq \frac{x-\frac{1}{x}}{x+y+z}$$ 1 punct

Într-adevăr, pentru $x \geq 1$ avem $x-\frac{1}{x} \geq 0$ şi $x+\frac{y+z}{x} \leq x+y+z$ 1 punct

iar pentru $x<1$ avem $x-\frac{1}{x}<0$ şi $x+\frac{y+z}{x}>x+y+z$. 1 punct

Cum $\sum \frac{x-\frac{1}{x}}{x+y+z}=\frac{1}{x+y+z}\left(x+y+z-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right) \geq 0$

inegalitatea este demonstrată. 1 punct

SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 9 februarie 2013

clasa a X-a

SUBIECTUL I

Arătați că pentru orice $a,b\in(0,1)$ sau $(1,\infty)$ are loc relația $\log_a^2 b+\log_b^2 a\geq \log_a b+\log_b a$.

(propusă de prof. Sîrb Vasile – C.T. „A.P.I.” Zalău)

Barem de corectare

Notăm $\log_a b=x$. Inegalitatea devine:

$x^2+\frac{1}{x^2}\geq x+\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\geq 0 \Leftrightarrow$ 2p

$x(x-1)+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)\geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)+\frac{1}{x}\left(\frac{1-x}{x}\right)\geq 0 \Leftrightarrow$ 2p

$x(x-1)-\frac{1}{x}\left(\frac{x-1}{x}\right)\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x-\frac{1}{x^2}\right)\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{x^3-1}{x^2}\right)\geq 0$ 2p

$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2(x^2+x+1)}{x^2}\geq 0$, adevărat...........................1p

SUBIECTUL II

Să se rezolve următoarea ecuație logaritmică: $x^{\log_3(x-1)}+2\cdot(x-1)^{\log_3 x}=3\cdot x^2$

Selectată de către prof. Bara Lajos din „Cele mai frumoase probleme de matematică” de Dan şi Vlad Sachelarie.

Barem de corectare

Se pun condițiile inițiale: $x>0, x>1, x\neq 1, x-1\neq 1 \Rightarrow x>1, x\neq 2$ .... 1 punct

Folosind identitatea: $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$

ecuația dată devine: $x^{\log_3(x-1)}+2\cdot x^{\log_3(x-1)}=3\cdot x^2$ ....3 puncte sau $x^{\log_3(x-1)} = x^2$ ....1 punct

Din ecuația de mai sus rezultă $\log_3(x-1) = 2$ .... 1 punct

Cu soluția $x_1 = 10$ ....1 punct

SUBIECTUL III

Să se demonstreze că dacă $z \in C^*$, atunci $\left|z + \frac{1}{z}\right|^4 \geq 4(1 + 2\operatorname{Re}(z^2))$.

selectată de prof. Lucaciu Simona din culegere de probleme

Barem de corectare

Notăm $\left|z + \frac{1}{z}\right| = m > 0$.

$$m^2 = \left|z + \frac{1}{z}\right|^2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right) = z \cdot \bar{z} + \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} + \frac{1}{z \cdot \bar{z}} = |z|^2 + \frac{1}{|z|^2} + \frac{2\operatorname{Re}(z^2)}{|z|^2}$$ 3puncte

Notăm $|z|^2 = t$ şi obținem

$$t + \frac{1 + 2\operatorname{Re}(z^2)}{t} = m^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t^2 - m^2 t + 1 + 2\operatorname{Re}(z^2) = 0$$ .... 2 puncte

Punem condiția $\Delta \geq 0$ ....1 punct

$$\Rightarrow m^4 \geq 4(1 + 2\operatorname{Re}(z^2)) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|z + \frac{1}{z}\right|^4 \geq 4(1 + 2\operatorname{Re}(z^2))$$ ....1 punct

SUBIECTUL IV

Să se determine funcţiile $f, g : (0, \infty) \to R$ cu proprietatea că $f\left(\frac{x}{3}\right) + 2 \leq \log_3 x \leq g(x) - 1$ şi $g\left(\frac{x}{3}\right) \leq \log_3 x \leq f(x) + 1$ oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

26597/Gazeta Matematică nr.4/2012

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059

Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,

E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

Barem de evaluare

Înlocuind pe x cu $3x$ în inegalităţile ....1 punct

$$f\left(\frac{x}{3}\right)+2\le\log_3 x \quad \text{şi} \quad g\left(\frac{x}{3}\right)\le\log_3 x,$$

rezultă:

$f(x)\le\log_3 x-1$ şi $g(x)\le\log_3 x+1,\ \forall\, x\in(0,\infty)$. ....2 puncte

Cum $f(x)\ge\log_3 x-1$

şi $f(x)\le\log_3 x-1 \Rightarrow f(x)=\log_3 x-1$ ....2 puncte

respectiv:

din ipoteză $1+\log_3 x\le g(x)$

şi $g(x)\le\log_3 x+1,\ \forall\, x\in(0,\infty) \Rightarrow g(x)=\log_3 x+1$ ....2 puncte

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 9 februarie 2013

clasa a XI-a

SUBIECTUL I

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = n \cdot \ln n$

a. Calculați $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n)$
b. Arătați că $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}\right) = 0$

selectată de către prof. Matyas Mirel din de la C.T. "Al.Papiu Ilarian" Zalău

Barem de corectare

a) $a_{n+1} - a_n = (n+1)\ln(n+1) - n\ln n = \ln(n+1) + n[\ln(n+1) - \ln n] =$
$= \ln(n+1) + n \cdot \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 2p

Cum $\lim_{n\to\infty}\ln(n+1) = \infty$ şi $\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1$ 1p

rezultă $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \infty$

b) $\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} = \sqrt{(n+1)\ln(n+1)} - \sqrt{n\ln n} =$
$\frac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln n}{\sqrt{(n+1)\ln(n+1)} + \sqrt{n\ln n}} =$ 2p

$= \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{(n+1)\ln(n+1)} + \sqrt{n\ln n}} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\sqrt{(n+1)\ln(n+1)} + \sqrt{n\ln n}} =$ 1p

$= \frac{\sqrt{\frac{\ln(n+1)}{n+1}}}{1+\sqrt{\frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)}}} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\sqrt{(n+1)\ln(n+1)} + \sqrt{n\ln n}} \to \frac{0}{1+1} + \frac{1}{\infty} = 0$ 1p

Am folosit următoarele rezultate:
$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1} = 0$ şi $\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)} = 1$

SUBIECTUL II

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir strict crescător de numere naturale cu proprietatea că:

$$x_{x_n} = 4n + 9, \forall n \in N^*$$

a. Arătați că există un astfel de şir.

b. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}$

Propusă de prof. Vlaicu Liviu (C.N.S.)

Barem de corectare

a) Se poate căuta $x_n = a\cdot n + b$ şi rezultă:

$$x_{x_n} = a(an+b)+b = a^2n+ab+b, \quad \text{de unde } a=2 \text{ şi } b=3.$$

$$x_{x_n} = 4n+9, \forall\, n\in\mathbf{N}^*$$

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, definit prin $x_n = 2n+3, \forall\, n\in\mathbf{N}^*$ verifică condiţiile din enunţ. 3 puncte

b) Din $x_n \geq n, \forall\, n\in\mathbf{N}^*$, 1 punct

rezultă $x_{x_n}\geq x_n$ 1 punct

sau $x_n \leq 4n+9$, 1 punct

$$\text{de unde: } \frac{x_n}{n^2}\leq\frac{4n+9}{n^2}$$

şi folosind criteriul majorării (sau al cleştelui) rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}=0$. 1 punct

Observaţie:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{P(n)}=0, \quad \forall\, P \quad \text{polinom de grad} \geq 2.$$

SUBIECTUL III

Să se arate că nu există nicio matrice $A\in M_2(R)$ $A\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^5=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$

Selectată de prof. Haiduc Sorina

Barem de corectare

Presupunem prin absurd că $A^5=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ (1) rezultă că $\det A^5=\det\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$=0, deci şi det$A$=0.

....1p

Înlocuind în ecuaţia lui Cayley –Hamilton:

$A^2 - Tr(A)\cdot A + \det A\cdot I_2 = O_2$, obţinem $A^2 = Tr(A)\cdot A$.

Folosin metoda inducției matematice, $A^n = Tr(A)^{n-1} \cdot A$

Pentru n=5, avem $A^5 = Tr(A)^4 \cdot A$ (2) 2p

$A \in M_2(\mathbb{R})$, fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (3).

Din (1), (2) şi (3) rezultă :

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = (a+d)^4 \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 1p

Rezolvând ecuația matriceală, obținem relațiile:

$(a+d)^4 \cdot a = 2$ (4) , $(a+d)^4 \cdot b = -1$, $(a+d)^4 \cdot c = 4$, $(a+d)^4 \cdot d = -2$, de unde

$b = \frac{-a}{2}$, $c = 2 \cdot a$, $d = -a$ (5)……………….. ....2p

Din relațiile (4) şi (5) rezultă $0 = -2$ fals.

Prin urmare, presupunerea făcută este falsă, adică nu există matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât

$A^5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$………………………………………..1p

SUBIECTUL IV

Fie $SL_2(\mathbf{Z}) = \{X \in M_2(\mathbf{Z}) | \det X = 1\}$.

Arătați că ecuația $X^2 + X^{-2} = I_2$ nu are soluții în $SL_2(Z)$.

26612 din Gazeta Matematică Nr.12/2012

Barem de corectare

Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ 1 punct

$\Rightarrow X^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix}$ 1 punct

$$X^{-2}=\left(X^2\right)^{-1}=\left(X^{-1}\right)^2=\left(\frac{1}{\det X}X^*\right)^2=\left(X^*\right)^2=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} d^2+bc & -b(d+a) \\ -c(d+a) & a^2+bc \end{pmatrix}$$ 1 punct

$$\Rightarrow X^2+X^{-2}=\begin{pmatrix} a^2+2bc+d^2 & 0 \\ 0 & a^2+2bc+d^2 \end{pmatrix}$$ 1 punct

$$X^2+X^{-2}=I_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a^2+2bc+d^2=1 \\ a^2+2bc+d^2=1 \end{cases}$$ 1 punct

Din $\det X=1 \quad \Rightarrow \quad ad-bc=1$, deci $2bc=2ad-2$ 1 punct

Egalitatea $a^2+2bc+d^2=1$ devine $a^2+2ad-2+d^2=1 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+d)^2=3$ imposibilă cu $a, d \in \mathbf{Z}$. 1 punct

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

etapa locală, 9 februarie 2013

SUBIECTUL I

Să se calculeze :

a) $\int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx$ b) $\int \frac{x}{1 + x + e^x} dx$

selectată de către prof. Paul Florinel de la C.T. "Al.Papiu Ilarian" Zalău

(locală Botoşani 2012)

Barem de corectare

a) $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} dx = \int \frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx$..2p

$= \int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx - \int \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}} dx$..1p

$= \int \frac{(e^x)'}{\sqrt{(e^x)^2-1}} dx + \int \frac{(e^{-x})'}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}} dx = \ln\left(e^x + \sqrt{(e^x)^2 - 1}\right) + \arcsin(e^{-x}) + C$........2p

b) folosind notația $f(x) = 1 + x + e^x$, avem $x = f(x) - f'(x)$..................................1p

$\int \frac{x}{1+x+e^x} dx = \int \frac{f(x)-f'(x)}{f(x)} dx = \int dx - \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = x - \ln(1 + x + e^x)$.................1p

SUBIECTUL II

Fie $f : R \to R$ o funcție primitivabilă cu proprietatea că există $a, b \in R,\ a \neq b$ astfel încât pentru oricare ar fi F primitivă a lui f are loc relația $F(x-a)F(b-x) = F(a+b-x),\ \forall x \in R$. Arătați că f se anulează în cel puțin un punct.

Propusă de prof. Vlaicu Liviu (C.N.S.)

Barem de evaluare

Pentru $x = a \Rightarrow F(0)F(b-a) = F(a)$ iar pt. $x = b$ $F(b-a)F(0) = F(b)$

Rezultă că $F(a) = F(b)$ şi conform teoremei lui Rolle, există c între a şi b astfel încât

$F'(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = 0,\ q.e.d.$

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059

Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,

E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

SUBIECTUL III

Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x * y = xy + ax + by + c,\ a,b,c \in R$.

a) Să se determine a, b şi c astfel încât legea "$*$" să fie stabilă pe $(2,+\infty)$ şi să aibă element neutru.

b) Să se determine a, b şi c astfel încât $((2,+\infty),*)$ să fie grup.

c) Determinați morfismele derivabile $f : ((2,+\infty),*) \to (R_+^*,\cdot),\ f(x) = ax + b$.

Selectată de prof. Haiduc Sorina

Fie legea $x * y = xy + ax + by + c,\ a,b,c \in R$.

Această lege, dacă admite un element neutru $e \in [2;+\infty)$, avem că $x * e = e * x = x$, oricare ar fi $x \in [2;+\infty)$.

Din $x * e = x \Rightarrow e(x+b) + (a-1)(x + \frac{c}{a-1}) = 0, a \neq 1$. 1p

Se observă că pentru existența elementului neutru trebuie să avem $b = \frac{c}{a-1}, a \neq 1$.

Analog, din $x * e = x \Rightarrow a = \frac{c}{b-1}, b \neq 1$.

De aici conchidem faptul că $a = b$ şi $c = a^2 - a$ 1p

Legea noastră arată acum în felul următor: $x * y = xy + ax + ay + a^2 - a$, unde $a \in R \setminus \{1\}$

Din $H = (2,+\infty)$ parte stabilă a lui R în raport cu legea $*$ rezultă că $\forall x, y \in H \Rightarrow x * y \in H$, adică din $x > 2, y > 2$ rezultă $(x-2)(y-2) > 0$ sau $x * y - (a+2)x - (a+2)y - a^2 + a + 6 > 2$, $\forall x, y \in H$

De aici $(a+2)(x+y) + a^2 - a - 6 > 0$, $\forall x, y \in H$

Rezultă că $a^2 + 3a + 2 \geq 0$, adică $a \in (-\infty;-2] \cup [-1;+\infty)$

Dar $e = 1 - a \in (2,+\infty) \Rightarrow a < -1$ 1p

b) În condițiile de la a), se verifică uşor că asociativitatea are loc pentru $a < -1$

....1p .

Din existența elementului simetrizabil rezultă că $x' = \frac{-ax - a^2 + a}{x + a} > 2, \forall x > 2$ relație îndeplinită dacă şi numai dacă $a = -2$.

Prin urmare, $((2,+\infty),*)$ este grup dacă şi numai dacă $a=b=-2,\ c=6$ 1p

c) Din b) rezultă că $x*y=xy-2x-2y+6$, $\forall x,y>2$.

Căutăm morfisme de forma $f:((2,+\infty),*)\to(R_+^*,\cdot),\ f(x)=ax+b$

Deoarece $e=3>2$ este element neutru în grupul $((2,+\infty),*)$ şi $e'=1$ este element neutru în grupul $(R_+^*,\cdot)$ rezultă că $f(3)=1$, adică $b=1-3a$. Rezută că $f:((2,+\infty),*)\to(R_+^*,\cdot),\ \ f(x)=ax+1-3a$.
....1p

Din definiția morfismului, $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y>2$, obținem $a=0$ sau $a=1$.

Pentru $a=0$, obținem morfismul $f:((2,+\infty),*)\to(R_+^*,\cdot),\ f(x)=1$, iar pentru $a=1$, obținem morfismul $f:((2,+\infty),*)\to(R_+^*,\cdot),\ f(x)=x-2$.

Evident, cele două morfisme sunt derivabile..1p

SUBIECTUL IV

Fie n un număr natural, $n\ge 2$ şi $(G,\cdot)$ un grup cu n^2-n-1 elemente. Ştiind că funcția $f:G\to G,\ f(x)=x^n$, este endomorfism al grupului, să se arate că $(G,\cdot)$ este abelian.

26549. /Gazeta de Matematică/ Nr. 12/2011

Barem de corectare
Cum f este endomorfism, rezultă succesiv

$(xy)^n=x^ny^n,\ \forall\ x,y\in G\ \Rightarrow\ (yx)^{n-1}=x^{n-1}y^{n-1}$ 1 punct

Şi înmulțind la dreapta cu yx rezultă $(yx)^n=x^{n-1}y^nx\ \Rightarrow$ 1 punct

$\Rightarrow\ y^nx^n=x^{n-1}y^nx\ \Rightarrow\ y^nx^{n-1}=x^{n-1}y^n,\ \forall\ x,y\in G\quad(1)$ 2 puncte

Pe de altă parte, cum $|G|=n^2-n-1$ rezultă că $x=x^{n^2-n},\ \forall\ x\in G$. (2) 1 punct

Atunci:

$xy=x^{n^2-n}y^{n^2-n}=\left(x^{n-1}\right)^n\left(y^n\right)^{n-1}\overset{(1)}{=}$ 1 punct

$=\left(y^n\right)^{n-1}\left(x^{n-1}\right)^n=y^{n^2-n}x^{n^2-n}\overset{(2)}{=}yx$ 1 punct