INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

etapa locală, 9 februarie 2013

clasa IX-a, servicii şi tehnic

SUBIECTUL I

Să se rezolve ecuația $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x-4)^2}=8$ pentru $2\le x\le 4$

Barem de corectare

Ecuația devine echivalentă cu $|x-2|+|x-3|+|x-4|=8$ 1p

Pentru $2\le x\le 4$ avem $|x-2|=x-2$ şi $|x-4|=-x+4$ 2p

Obținem ecuația $x-2+|x-3|-x+4=8$ 1p

Deci $|x-3|=6$ ....1p care are soluțiile $x=9\notin[2,4]$ şi $x=3\notin[2,4]$.............2p

SUBIECTUL II

Fie şirul $(a_n)_{n\ge 1}$ cu $a_n=2n-1$.

a) Determinințti a_1 ,a_2 ,a_{2013}
b) Arătați că şirul $(a_n)_{n\ge 1}$ este o progresie aritmetică.
c) Demonstrați că S_{2013} este pătrat perfect.

Propusă de prof. Pacurar Sorina, sursa: subiecte olimpiada locala din alte judete

Barem de corectare

a)Pentru determinarea lui a_1 =1 , a_2 =3 , a_{2013}=4025 ……………………………………..……2p

b)Pentru scrierea relatiei $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ ……………………………………………………1p

Pentru demonstrarea egalitatii ………………………………….…………2p

c)Pentru formula $S_{2013}=\frac{(a_1+a_{2013})2013}{2}$ ………………………………………..1p

Finalizare S_{2013} $=2013^2$ …………………………………………………………1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SUBIECTUL III

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\frac{x+2}{5}\right]=2x-3$ *Prof. Anderlik Istvan*

Barem de corectare

punem condiția $2x-3\in Z$ 1p

aplicăm inegalitatea $a-1<[a]\leq a$

$\frac{x+2}{5}-1<2x-3\leq\frac{x+2}{5}$ 1p

-se rezolvă sistemul de inecuație:

$$\begin{cases} x-3\langle 10x-15 \\ 10x-15\leq x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left(\frac{4}{3},\infty\right) \\ x\in\left(-\infty,\frac{17}{9}\right] \end{cases} \Rightarrow x\in\left(\frac{4}{3},\frac{17}{9}\right] \Rightarrow 2x-3\in\left(-\frac{1}{3},\frac{7}{9}\right]$$ 4p

Cum $2x-3\in Z$ avem $2x-3=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$ 1p

SUBIECTUL IV

Fie funcția $f:R\to R$, $f(x)=[x]\{x\}+9-3x$

a) Calculați $f\left(\frac{7}{2}\right)-f\left(\sqrt{10}\right)$

b) Rezolvați în R ecuația $f(x)=0$ *Propusa de prof. Boda Zoltan*

Barem de corectare

a) $f\left(\frac{7}{2}\right)=\left[\frac{7}{2}\right]\left\{\frac{7}{2}\right\}+9-3\cdot\frac{7}{2}=3\cdot\frac{1}{2}+9-\frac{21}{2}=0$ 2p

$f\left(\sqrt{10}\right)=3\left(\sqrt{10}-3\right)+9-3\sqrt{10}=0$ 2p

Deci $f\left(\frac{7}{2}\right)-f\left(\sqrt{10}\right)=0$

b) Cum $x=[x]+\{x\}$ pentru orice $x\in R$ ecuația devine $([x]-3)(\{x\}-3)=0$ 1p

Deci $([x]-3)=0\Rightarrow x\in[3,4)$........1p si $(\{x\}-3)=0\Rightarrow\{x\}=3$ fals...........1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

etapa locală, 9 februarie 2013

clasa X-a, servicii şi tehnic

SUBIECTUL I

Calculați

a) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[3]{4}\cdot 16^{-1}\cdot 4^{\frac{-1}{2}}\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt{128}}$ b) $\lg\left(1-\frac{1}{2}\right)+\lg\left(1-\frac{1}{3}\right)+........+\lg\left(1-\frac{1}{1000}\right)$

Barem de corectare

a) Transformarea în puteri cu exponent număr rațional...........................1p

Definitivarea calculelor................................1p

Finalizare $\log_{\frac{1}{2}} 2^{\frac{-15}{2}}=\frac{15}{2}$............................1p

b) Aplicarea proprietății sumelor de logaritmi cu aceeaşi bază.................1p

Transformarea calculelor din paranteză $\lg\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot...........\cdot\frac{999}{1000}\right)$....................2p

Finalizare $\lg\left(\frac{1}{1000}\right)=-3$..........................1p

SUBIECTUL II

Fie $f:C\to C$, $f(z)=z^2+z+1$.

a) (2p) Rezolvați în C ecuația $f(z)=0$.

b) (2p) Dacă z_1 şi z_2 sunt soluțiile ecuației $f(z)=0$ arătați că $z_1^{\ 3}+z_2^{\ 3}$ este număr real.

c) (3p) Să se afle $m\in R$ pentru care $f(m+i)$ este număr real.

autor – prof. Sîrb Vasile – C.T. „A.P.I.” Zalău

Barem de corectare

a) $z^2+z+1=0 \Rightarrow \Delta=-3$ şi $z_1=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_2=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ 2p

b) Fie α o soluție a ecuației $z^2+z+1=0$. Atunci $\alpha^2+\alpha+1=0$. Înmulțim ultima relație cu $(\alpha-1)$ şi obținem: $\alpha^3-1=0$, de unde $\alpha^3=1$. 2p

Cum α poate fi z_1 şi z_2 avem: $z_1^3+z_2^3=1+1=2\in R$ 1p

Altfel: se poate calcula efectiv $z_1^3+z_2^3$ sau se notează $E=z_1^3+z_2^3$ şi atunci $\overline{E}=\overline{z_1^3+z_2^3}=\overline{z_1^3}+\overline{z_2^3}=\overline{z_1}^3+\overline{z_2}^3=z_2^3+z_1^3=E$. Deci $\overline{E}=E$ rezultă $E\in R$.

c) $f(m+i)=(m^2+m)+(2m+1)\cdot i$ 1p

Acesta este număr real dacă $2m+1=0$, adică $m=-\frac{1}{2}$ 1p

SUBIECTUL III

Să se afle $x\in R$ pentru care este definită expresia: $E(x)=\log_{\frac{x-1}{x+1}}\left(2x^2+x-3\right)$.

Manual, clasa a X-a, Burtea

Barem de notare

Condițiile de existență sunt: $\begin{cases} 2x^2+x-3>0 \\ \frac{x-1}{x+1}>0 \\ \frac{x-1}{x+1}\neq 1 \end{cases}$ 2p

Câte 1p pentru rezolvarea fiecărei condiții...................3p

Obținem $x\in\left(\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup(1,\infty)\right)\cap\left((-\infty,-1)\cup(1,\infty)\right)$ 1p

adică $x\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup(1,\infty)$..................1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059
Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SUBIECTUL IV

Să se determine $z \in \mathbf{C}$, dacă $z + |z| = \bar{z}$.

selectată de prof. Tuduce Florian (C.N.S.)
din Gazeta de Matematică, nr.10/2012

barem de evaluare

Fie $z = a + bi,\ a, b \in \mathbf{R}$ — 1 punct

$z + |z| = \bar{z} \quad \Leftrightarrow \quad a + bi + \sqrt{a^2 + b^2} = a - bi$ — 1 punct

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = -2bi \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ — 2 puncte

$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad z = 0 + 0i \quad \Rightarrow z = 0$ — 3 puncte

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

etapa locală, 9 februarie 2013

clasa XI-a, servicii şi tehnic

SUBIECTUL I

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

a) Să se arate că daca $X\in M_2(R)$ are proprietatea că $X\cdot A=A\cdot X$ atunci există $a,b\in R$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$

b) Să se calculeze X^n unde $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$, $n\in N, n\geq 1$

Propusă de prof. Jecan Ioan

Barem de corectare

a) Se consideră matricea $X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$

$A\cdot X=\begin{pmatrix}x & y\\ 2z & 2t\end{pmatrix}$.................1p şi $X\cdot A=\begin{pmatrix}x & 2y\\ z & 2t\end{pmatrix}$.................1p

Din $X\cdot A=A\cdot X$ obținem $y=z=0$ 1p

şi luând $a=x, b=2t$ obținem $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$....................1p

b) Verificăm prin inducție matematică că $X^n=\begin{pmatrix}a^n & 0\\ 0 & b^n\end{pmatrix}$

Etapa de verificare..................1p

Etapa de demonstrație.........................2p

SUBIECTUL II

a) Să se calculeze $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-3x+2}$

b) Fie $f: D \to R$, $f(X) = x - \sqrt{ax^2+bx+1}$, $a,b \in R$, $a > 0$. Să se determine a,b astfel încât

$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\frac{1}{2}$

Selectata de prof. Poenar Maria din Matematica pentru bacalaureat 2005 editura Corint 2004

Barem de corectare şi notare

a) Raționalizarea fracției 1p

Finalizare 2p

b) Raționalizarea 1p

Identificarea coeficienților 2p

Finalizare...1p

SUBIECTUL III

Să se determine constanta reală m pentru care funcția $f: \left(\frac{1}{e^2}, 2\right) \to R$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{m^2 - 2mx\ln(xe) + x^2}, x \in \left(\frac{1}{e^2}, 1\right) \\ m + \frac{x}{2}, x \in [1, 2) \end{cases}$$ are limită în punctul $x_0 = 1$.

Propusă de prof. Crişan Teodor

Barem de corectare

$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \sqrt{m^2 - 2mx\ln(xe) + x^2} = |m-1|$ 2p

$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \left(m + \frac{x}{2}\right) = m + \frac{1}{2}$ 2p

$\Rightarrow m + \frac{1}{2} = |m-1|$ ecuație din care rezultă cerința $m + \frac{1}{2} \geq 0$ deci $m \geq -\frac{1}{2}$ 2p

Atunci

$m-1=\pm\left(m+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow m=\frac{3}{4}$ 1p

SUBIECTUL IV

Se considera punctele $A(2,m);B(5,1);C(2m-8,m)$.

a) Să se determine $m\in\mathrm{R}$ astfel încât aria triunghiului ABC să fie egală cu 12.

b) Să se determine $m\in\mathrm{R}$ astfel încât punctele A,B,C să fie coliniare.

selectată de prof. Driha Ioan din Culegere de probleme pentru liceu. Algebra clasele IX-XII (Editie 2009), Năstăsescu, Niţă

Barem de corectare

a) calcularea lui $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2m=8 & m & 1 \end{vmatrix}$ = 2m^2 - 12m + 10, ...1 p

scrierea formulei A = $\frac{1}{2}\cdot|\Delta|$ ....1 p

construirea ecuatiei | m^2 - 6m + 5 | = 12 ....1 p

rezolvarea ecuatiilor m^2 - 6m + 5 =12 ; m^2 - 6m + 5 = - 12 si

calcularea valorilor m = 7, si m= -1 .... .2 p

b) punerea conditiei Δ = 0, <=> m^2 - 6m + 5 = 0,..................................1 p
rezolvarea ecuatiei si aflarea solutiei m = 5, m= 1,....................... . 1 p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Cod 450059

Tel: 0260661391, Fax: 0260619190,

E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – FILIALA SĂLAJ

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”

etapa locală, 9 februarie 2013

clasa XII-a, servicii şi tehnic

SUBIECTUL I

Pe mulțimea R a numerelor reale se consideră legea de compoziție

$(x, y) \to x \circ y \overset{def}{=} xy - 2(x+y) + 6$ şi fie $G = (2, \infty)$.

a) Să se demonstreze că G este parte stabilă în raport cu această lege
b) Să se arate că $(G, \circ)$ este grup comutativ

selectată de prof. Driha Ioan din Culegere de probleme pentru liceu. Algebra clasele IX-XII (Editie 2009), Năstăsescu, Niță

Barem de corectare

a) Fie x $\in$ G , => x $\in (2, +\infty)$, => x > 2, => x – 2 > 0
   Fie y $\in$ G , => y $\in (2, +\infty)$, => y > 2, => y– 2 > 0. ……………………1 p

x $\circ$ y =(x-2)(y-2)+2 > 2 , => x $\circ$ y $\in$G. => G = parte stabila . …………1 p

b) - verificarea asociativității ……………………..................................2 p

- verificarea comutativității ....0,5 p

- calcularea elementului neutru e =3, ...1 p

- determinarea elementului simetric ....1 p

- finalizare ....0,5 p

SUBIECTUL II

1. Calculați integralele:

a) (2p) $\int \frac{(x+2)^3}{x} dx$; $x > 0$.

b) (2p) $\int e^x \cdot \cos x \; dx$; $x \in R$.

c) (3p) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x+5}dx$; $x \in R$.

propusă de prof. Sîrb Vasile, din Culegerea de V. Schneider, Ed. Valeriu

Barem de corectare

a) se ridică la puterea a 3-a şi se separă în a integrale. 1p

Se obține: $I = \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 12x + 8\ln x + C$ 1p

b) Integrăm prin părți de două ori:

$$I = \int e^x \cos x dx = \int \left(e^x\right)' \cos x dx = e^x \cos x - \int e^x \left(\cos x\right)' dx = e^x \cos x - \int e^x \left(-\sin x\right) dx =$$

$$= e^x \cos x + \int \left(e^x\right)' \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - I$$ 1p

Deci $I = \frac{1}{2}e^x\left(\cos x + \sin x\right) + C$ 1p

c) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x+5}dx$

Se poate face notația $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$ 1p

$\Rightarrow I = -\int \frac{1}{t^2+5}dt = -\frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{t}{\sqrt{5}} + C$ 2p

de unde $I = -\frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{\cos x}{\sqrt{5}} + C$ 1p

SUBIECTUL III

Se consideră funcțiile $f, F : R \to R$. Ştiind că F este o primitivă a funcției f şi că $f(x) + F(x) = 3e^{2x}$

a) Calculați $(e^x F(x))'$
b) Determinați funcția f

Selectată de prof. Adonia Opriş din Manual cls a XII-a M2, Editura Tamar

Barem de corectare

a) F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F$ derivabilă pe R şi $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in R$......1p

$(e^x F(x))' = e^x F(x) + e^x F'(x) = e^x F(x) + e^x f(x) = e^x (F(x) + f(x)) = e^x \cdot 3e^{2x} = 3e^{3x}$ 3p

b) Având în vedere că $(e^x F(x))' = 3e^{3x} = (e^{3x})'$ obținem că $e^x F(x) = e^{3x}$ ....2p deci $F(x) = e^{2x}$ şi prin derivare $f(x) = 2e^{2x}$ 1p

SUBIECTUL IV

Pe R se defineşte legea de compoziție $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$; $\forall x, y \in R$.

a) (2p) Să se arate că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$; $\forall x, y \in R$.

b) (3p) Să se rezolve ecuația $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{de\ 10\ ori\ x} = -1$.

c) (3p) Să se determine două numere $a, b \in Q \setminus Z$, astfel încât $a \circ b \in N$.

Barem de corectare

a) Se grupează convenabil după care se va da factor comun 2p

b) Din punctul a) se deduce $x \circ x = 3(x+1)^2 - 1$,......................0,5p

apoi $x \circ x \circ x = 3^2(x+1)^3 - 1$, de unde inductiv $\underbrace{x \circ x \circ ... \circ x}_{de\ 10\ ori\ x} = 3^9(x+1)^{10} - 1$ 1,5p

Astfel ecuația are soluția $x = -1$ 1p

c) Luăm spre exemplu $a = \frac{4}{3} \in Q \setminus Z$ şi consider $a \circ b = 1$. 2p

Înlocuim pe *a* şi din ecuația obținută gîsim pe $b = -\frac{5}{7} \in Q \setminus Z$ 1p