

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VI-a

1. Se consideră numerele raționale pozitive:

$$x = 1\frac{1}{99} + 2\frac{2}{99} + 3\frac{3}{99} + \dots + 98\frac{98}{99} \text{ și } y = \frac{21}{97} + \frac{2121}{9797} + \frac{212121}{979797}.$$

- a) Arătați că x este pătrat perfect;
b) Comparați numerele x și y .

Ana Marcela Popa, Rădăuți

Soluție. a) $x = \frac{1 \cdot 99 + 1}{99} + \frac{2 \cdot 99 + 2}{99} + \frac{3 \cdot 99 + 3}{99} + \dots + \frac{98 \cdot 99 + 98}{99} = \frac{1 \cdot (99 + 1)}{99} + \frac{2 \cdot (99 + 1)}{99} + \frac{3 \cdot (99 + 1)}{99} + \dots + \frac{98 \cdot (99 + 1)}{99} =$
 $= \frac{1 \cdot 100}{99} + \frac{2 \cdot 100}{99} + \frac{3 \cdot 100}{99} + \dots + \frac{98 \cdot 100}{99} = \frac{100}{99} + \frac{200}{99} + \frac{300}{99} + \dots + \frac{9800}{99} = \frac{100 + 200 + 300 + \dots + 9800}{99} =$
 $= \frac{100 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 98)}{99} = \frac{100 \cdot \frac{98 \cdot 99}{2}}{99} = 100 \cdot \frac{\cancel{98}^{49} \cdot \cancel{99}^1}{\cancel{2}_1} \cdot \frac{1}{\cancel{99}_1} = 4900 = 70^2$ care este pătrat perfect.

b) $y = \frac{21}{97} + \frac{2121}{9797} + \frac{212121}{979797} = \frac{21}{97} + \frac{21 \cdot \cancel{101}^1}{97 \cdot \cancel{101}_1} + \frac{21 \cdot \cancel{10101}^1}{97 \cdot \cancel{10101}_1} = \frac{21}{97} + \frac{21}{97} + \frac{21}{97} = 3 \cdot \frac{21}{97} = \frac{63}{97} < 1.$

Avem $x = 4900 > 1$ și $y = \frac{63}{97} < 1$, deci $y < x$.

Soluția 2: Pentru calculul lui x .

$$x = \left(1 + \frac{1}{99}\right) + \left(2 + \frac{2}{99}\right) + \left(3 + \frac{3}{99}\right) + \dots + \left(98 + \frac{98}{99}\right) = (1 + 2 + 3 + \dots + 98) + \left(\frac{1}{99} + \frac{2}{99} + \frac{3}{99} + \dots + \frac{98}{99}\right) =$$

$$= \frac{98 \cdot 99}{2} + \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 98}{99} = \frac{98 \cdot 99}{2} + \frac{\frac{98 \cdot 99}{2}}{99} = \frac{98 \cdot 99}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{99}\right) = \frac{\cancel{98}^{49} \cdot \cancel{99}^1}{\cancel{2}_1} \cdot \frac{100}{\cancel{99}_1} = 49 \cdot 100 = (7 \cdot 10)^2 = 70^2$$

Barem.

Aduce x la forma $x = \frac{100 + 200 + 300 + \dots + 9800}{99}$	2p
Finalizează calculele și găsește $x = 70^2$ pătrat perfect	2p
Aduce y la forma $y = \frac{63}{97}$	2p
$x = 4900 > 1$ și $y = \frac{63}{97} < 1$, deci $y < x$	1p

2. Să se demonstreze că numărul $A = 4 \cdot 15^n + 4 \cdot 134^n + 34^{2n+1}$ este divizibil cu 7, pentru orice număr natural n .

Gabriela Sascău, Rădăuți

Soluție. Vom folosi: $(a+1)^k = M_a + 1, \forall a, k \in \mathbb{N}$ și $(a-1)^{2p+1} = M_a - 1, \forall a \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{N}$.

$$A = 4 \cdot (14+1)^n + 4 \cdot (133+1)^n + (35-1)^{2n+1} = 4 \cdot (M_7 + 1)^n + 4 \cdot (M_7 + 1)^n + (M_7 - 1)^{2n+1} =$$

$$= 4 \cdot (M_7 + 1) + 4 \cdot (M_7 + 1) + (M_7 - 1) = 4 \cdot M_7 + 4 + 4 \cdot M_7 + 4 + M_7 - 1 = M_7 + 7 = M_7. \text{ Deci } A = M_7, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Barem.

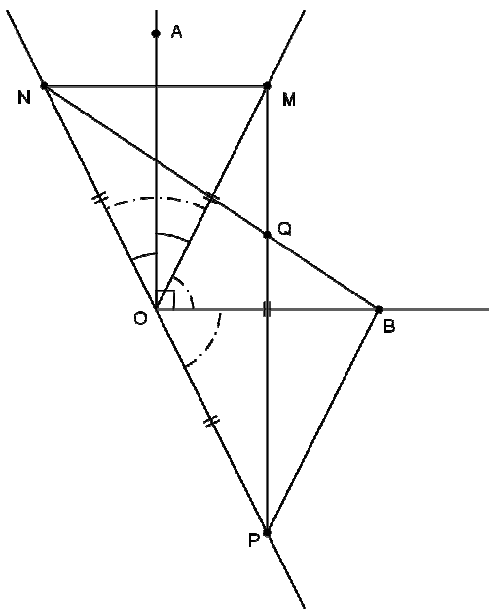
Arată că $15^n = (14+1)^n = (M_7 + 1)^n = M_7 + 1$	2p
Arată că $134^n = (133+1)^n = (M_7 + 1)^n = M_7 + 1$	2p
Arată că $34^{2n+1} = (35-1)^{2n+1} = (M_7 - 1)^{2n+1} = M_7 - 1$	2p
Arată că $A = 4 \cdot (M_7 + 1) + 4 \cdot (M_7 + 1) + (M_7 - 1) = 4 \cdot M_7 + 4 + 4 \cdot M_7 + 4 + M_7 - 1 = M_7 + 7 = M_7, \forall n \in \mathbb{N} \dots$	1p

3. Se consideră unghiul drept AOB și semidreptele $(OM, (ON, (OP$ astfel încât $(OA$ este bisectoarea unghiului MON , $(OB$ este bisectoarea unghiului MOP , iar $(OM$ este bisectoarea unghiului NOB .
Dacă $[OM] \equiv [ON] \equiv [OP] \equiv [OB]$, atunci:

- realizați figura corespunzătoare datelor problemei;
- arătați că punctele N, O și P sunt coliniare;
- arătați că $\Delta MOP \equiv \Delta NOB$;
- arătați că $\Delta NMQ \equiv \Delta PBQ$, unde $\{Q\} = MP \cap NB$.

Dorel Ispășoiu, Gura Humorului

Soluție. a)



- b) $(OA$ bisectoarea $\sphericalangle MON \Rightarrow (OA \subset \text{Int}(\sphericalangle MON)$ și

$$m(\sphericalangle NOA) = m(\sphericalangle AOM) = \frac{m(\sphericalangle NOM)}{2} = a.$$

- $(OB$ bisectoarea $\sphericalangle MOP \Rightarrow (OB \subset \text{Int}(\sphericalangle MOP)$ și

$$m(\sphericalangle MOB) = m(\sphericalangle BOP) = \frac{m(\sphericalangle MOP)}{2} = b.$$

$$m(\sphericalangle AOB) = 90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle AOM) + m(\sphericalangle MOB) = 90^\circ \Rightarrow a + b = 90^\circ.$$

- $(OM$ bisectoarea $\sphericalangle NOB \Rightarrow (OM \subset \text{Int}(\sphericalangle NOB)$ și

$$m(\sphericalangle NOM) = m(\sphericalangle MOB) = \frac{m(\sphericalangle NOB)}{2} \quad (1).$$

$$m(\sphericalangle NOP) = m(\sphericalangle NOM) + m(\sphericalangle MOP) = 2a + 2b = 2(a + b) = 180^\circ \Rightarrow$$

punctele N, O și P sunt coliniare.

- c) Din relația (1) $\Rightarrow 2a = b$. Dar $a + b = 90^\circ$ și atunci obținem $3a = 90^\circ \Rightarrow a = 30^\circ$ și $b = 60^\circ$.

- Din $[OM] \equiv [ON]$ (ipoteză), $[OP] \equiv [OB]$ (ipoteză) și

$$\sphericalangle MOP \equiv \sphericalangle NOB \text{ (au măsurile de } 120^\circ) \Rightarrow \Delta MOP \equiv \Delta NOB \text{ (L.U.L.)}$$

- d) Din $\Delta MOP \equiv \Delta NOB \Rightarrow [MP] \equiv [NB]$ (2).

Din $[ON] \equiv [OB]$ (ipoteză), $[OM] \equiv [OP]$ (ipoteză) și $\sphericalangle NOM \equiv \sphericalangle BOP$ (au măsurile de 60°)

L.U.L.

$$\Rightarrow \Delta NOM \equiv \Delta BOP \Rightarrow [NM] \equiv [BP] \quad (3).$$

Din $[MP] \equiv [NB]$ (din (2)), $[NM] \equiv [BP]$ (din (3)) și $[NP] \equiv [NP]$ (latură comună) $\Rightarrow \Delta NMP \equiv \Delta PBN$ (L.L.L.)

$$\sphericalangle NMP \equiv \sphericalangle PBN \quad (4).$$

Din $[NM] \equiv [BP]$ (din (3)), $\sphericalangle NMQ \equiv \sphericalangle PBQ$ (din (4)) și $\sphericalangle MQN \equiv \sphericalangle BQP$ (opuse la vârf) $\Rightarrow \Delta MNQ \equiv \Delta BPQ$ (L.U.U.).

Barem.

a) Figura	1p
b) Calculează $m(\sphericalangle NOP) = m(\sphericalangle NOM) + m(\sphericalangle MOP) = 2a + 2b = 2(a + b) = 180^\circ \Rightarrow$ punctele N, O și P sunt coliniare	2p
c) Arată că $\Delta MOP \equiv \Delta NOB$ conform cazului L.U.L.....	1p
d) Arată că $\Delta NOM \equiv \Delta BOP$ (L.U.L.)	1p
Arată că $\Delta NMP \equiv \Delta PBN$ (L.L.L.)	1p
Arată că $\Delta MNQ \equiv \Delta BPQ$ (L.U.U.)	1p

Notă:

Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.