

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VII-a

1. Determinați partea întreagă a numărului $x = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2013^2}$.

Prof. Andronic Aurica Mihaela

Soluție: Se observă că fiecare termen al sumei verifică: $\frac{1}{2 \cdot 3} < \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2}$;

$\frac{1}{3 \cdot 4} < \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3}$; $\frac{1}{4 \cdot 5} < \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3 \cdot 4}$; $\frac{1}{2013 \cdot 2014} < \frac{1}{2013^2} < \frac{1}{2012 \cdot 2013}$. Se adună inegalitățile și se obține:

$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2013 \cdot 2014} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2013^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2012 \cdot 2013}$ Deci

, $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2013} - \frac{1}{2014} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2013^2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} - \frac{1}{2013}$. De unde

rezultă: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2014} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2013^2} < 1 - \frac{1}{2013} \Rightarrow \frac{1006}{2014} < x < 1 - \frac{1}{2013} \Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0$.

Barem:

$\frac{1}{2 \cdot 3} < \frac{1}{2^2} < \frac{1}{1 \cdot 2}$; $\frac{1}{3 \cdot 4} < \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2 \cdot 3}$; $\frac{1}{4 \cdot 5} < \frac{1}{4^2} < \frac{1}{3 \cdot 4}$; ...; $\frac{1}{2013 \cdot 2014} < \frac{1}{2013^2} < \frac{1}{2012 \cdot 2013}$	2 p
$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{2013 \cdot 2014} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2013^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2012 \cdot 2013}$	1 p
$\frac{1}{2} - \frac{1}{2014} < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2013^2} < 1 - \frac{1}{2013}$	2 p
$\frac{1006}{2014} < x < 1 - \frac{1}{2013} \Rightarrow 0 \leq x < 1$	1 p
$[x] = 0$	1 p

2. a) Determinați numerele naturale de forma \overline{aba} , scrise în sistemul zecimal, cu proprietatea:

$$\sqrt{\overline{aba}} = \frac{a^2}{3} + 2b.$$

b) Determinați numărul natural nenul x cu proprietatea:

$$\sqrt{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot x)^2 + 13} \in \mathbb{N}.$$

Soluție: a) Cum a și b sunt cifre, $a \neq 0$, avem $\frac{a^2}{3} + 2b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{\overline{abc}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \overline{abc} = n^2, n \in \mathbb{N}$. Deci

$\frac{a^2}{3} + 2b \in \mathbb{N} \Rightarrow 3/a^2$, iar 3 este număr prim, rezultă $a = 3k, k \in \mathbb{N}$. Avem: $a \in \{3, 6, 9\}$. Pentru $a = 3$ avem

$\sqrt{3b3} = 2b + 3$, iar singurele pătrate perfecte între 300 și 400 sunt $18^2 = 324$ și $19^2 = 361$ care nu verifică.

Pentru $a = 6$, avem $\sqrt{6b6} = 2b + 12$, iar pătratele perfecte între 600 și 700 sunt $25^2 = 625$ și $26^2 = 676$. Se

verifică $\overline{aba}=676$. Pentru $a=9$, avem $\sqrt{9b9} = 2b + 27$, iar pătratul perfect între 900 și 999 este $31^2 = 961$ care nu verifică.

b) $\sqrt{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot x)^2 + 13} \in \mathbb{N} \Rightarrow (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot x)^2 + 13$ este pătrat perfect. Cum restul împărțirii unui pătrat perfect la 5 este 0, 1 sau 4, pentru $x \geq 5$, numărul $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot x)^2 + 13$ nu este pătrat perfect deoarece are restul împărțirii la 5 egal cu 3. Rămân de analizat cazurile $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. Singurul caz care verifică este $x = 3$.

Barem:

a) a și b sunt cifre, $a \neq 0$, avem $\frac{a^2}{3} + 2b \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{abc} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \overline{abc} = n^2, n \in \mathbb{N}$	1 p
$\frac{a^2}{3} + 2b \in \mathbb{N} \Rightarrow 3/a^2$, iar 3 este număr prim, rezultă $a = 3k, k \in \mathbb{N}$. Avem: $a \in \{3, 6, 9\}$	
Pentru $a = 3$ avem $\sqrt{3b3} = 2b + 3$, iar singurele pătrate perfecte între 300 și 400 sunt $18^2 = 324$ și $19^2 = 361$ care nu verifică	1 p
Pentru $a = 6$, avem $\sqrt{6b6} = 2b + 12$, iar pătrate perfecte între 600 și 700 sunt $25^2 = 625$ și $26^2 = 676$. Se verifică $\overline{aba}=676$.	1 p
Pentru $a=9$, avem $\sqrt{9b9} = 2b + 27$, iar pătratul perfect între 900 și 999 este $31^2 = 961$ care nu verifică.	1 p
b) restul împărțirii unui pătrat perfect la 5 este 0, 1 sau 4	1 p
pentru $x \geq 5$, numărul $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot x)^2 + 13$ nu este pătrat perfect deoarece are restul împărțirii la 5 egal cu 3	1 p
Rămân de analizat cazurile $x \in \{1, 2, 3, 4\}$. Singurul caz care verifică este $x = 3$.	1 p

3. Fie trapezul $MNPQ$ cu $MN \parallel PQ, MN < PQ$ și punctele B, C picioarele perpendicularelor duse din M , respectiv P , pe dreapta NQ . Arătați că $\triangle ABC$ este triunghi isoscel, unde A este mijlocul segmentului MP .

Prof. Alexandru Elena-Marcela

Soluție: Fie $AD \perp NQ, D \in NQ$. Cum $MB \perp NQ$ și $PC \perp NQ$ avem $MB \parallel AD \parallel PC$. În $\triangle OPC$, unde $\{O\} = QN \cap MP, AD \parallel PC$, conform teoremei lui Thales avem: $\frac{OA}{AP} = \frac{OD}{DC}$ (1). Cum $MB \parallel AD$, conform teoremei lui Thales avem: $\frac{OA}{OM} = \frac{OD}{OB}$, de unde $\frac{OA}{OM + OA} = \frac{OD}{OB + OD}$, deci $\frac{OA}{AM} = \frac{OD}{DB}$ (2). Din (1) și (2), cum $AP = AM$ (ip.), rezultă $DC = DB$, de unde D mijlocul $[BC]$. Cum AD este mediatoarea $[BC]$, conform proprietății mediatoarei, avem $AB = AC$, deci $\triangle ABC$ este triunghi isoscel.

Barem:

Fie $AD \perp NQ, D \in NQ$. Cum $MB \perp NQ$ și $PC \perp NQ$ avem $MB \parallel AD \parallel PC$.	1 p
În $\triangle OPC$, unde $\{O\} = QN \cap MP, AD \parallel PC$, conform teoremei lui Thales avem: $\frac{OA}{AP} = \frac{OD}{DC}$ (1).	1 p

Cum $MB \parallel AD$, conform teoremei lui Thales avem: $\frac{OA}{OM} = \frac{OD}{OB}$, de unde $\frac{OA}{OM+OA} = \frac{OD}{OB+OD}$, deci $\frac{OA}{AM} = \frac{OD}{DB}$ (2).	2 p
Din (1) și (2), cum $AP = AM$ (ip.), rezultă $DC = DB$, de unde D mijlocul $[BC]$.	1 p
AD este mediatoarea $[BC]$, conform proprietății mediatoarei, avem $AB=AC$, deci $\triangle ABC$ este triunghi isoscel.	2 p

4. În patrulaterul convex $ABCD$, $[AD] \equiv [BC]$, $m(\sphericalangle BCD) = 120^\circ$, (AC este bisectoarea $\sphericalangle DAB$ și (BD este bisectoarea $\sphericalangle ABC$. Să se arate că: $AB = 2CD$.

Prof. Boghian Stela

Soluție: Fie $AC \cap BD = \{O\}$. În $\triangle ABD$, conform teoremei bisectoarei, avem: $\frac{BO}{OD} = \frac{AB}{AD}$ (1). În $\triangle ABC$,

conform teoremei bisectoarei, avem: $\frac{AO}{OC} = \frac{AB}{BC}$ (2). Cum $AD=BC$ (ip.), din (1) și (2), conform reciprocei

teoremei lui Thales, avem: $\frac{BO}{OD} = \frac{AO}{OC} \Rightarrow CD \parallel AB$, deci $ABCD$ este trapez isoscel. Din ip. $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle CAB$

și $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle CAB$ (alt. int.) rezultă $\triangle ACD$ isoscel, deci $[AD] \equiv [DC]$. Cum $m(\sphericalangle BCD) = 120^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle ABC) = 60^\circ$, deci $m(\sphericalangle ABD) = 30^\circ$. $ABCD$ trapez isoscel

$\Rightarrow m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle ABC) = 60^\circ$. Triunghiul ABD este triunghi dreptunghic cu un unghi de 30° , de unde

$AB = 2AD$, iar din (1) rezultă $AB = 2CD$.

Barem:

Fie $AC \cap BD = \{O\}$. În $\triangle ABD$, conform teoremei bisectoarei, avem: $\frac{BO}{OD} = \frac{AB}{AD}$ (1).	1 p
În $\triangle ABC$, conform teoremei bisectoarei, avem: $\frac{AO}{OC} = \frac{AB}{BC}$ (2).	1 p
Cum $AD=BC$ (ip.), din (1) și (2), conform reciprocei teoremei lui Thales, avem: $\frac{BO}{OD} = \frac{AO}{OC} \Rightarrow CD \parallel AB$, deci $ABCD$ este trapez isoscel.	2 p
Din ip. $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle CAB$ și $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle CAB$ (alt. int.) rezultă $\triangle ACD$ isoscel, deci $[AD] \equiv [DC]$.	1 p
Cum $m(\sphericalangle BCD) = 120^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle ABC) = 60^\circ$, deci $m(\sphericalangle ABD) = 30^\circ$. $ABCD$ trapez isoscel $\Rightarrow m(\sphericalangle DAB) = m(\sphericalangle ABC) = 60^\circ$. Triunghiul $\triangle ABD$ este triunghi dreptunghic cu un unghi de 30° , de unde $AB = 2AD$, iar din (1) rezultă $AB = 2CD$.	2 p