OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA
16 februarie 2013

CLASA a IX-a

1. Fie numerele $a, b, x, y \in (0, +\infty)$ în relaţia de ordine $a \le x \le y \le b$. Să se arate că:

a) $\frac{a}{b} \le \frac{x}{y} \le \frac{y}{x} \le \frac{b}{a}$;   b) $(a^2 + b^2)xy \ge ab(x^2 + y^2)$.

2. Să se determine funcţiile $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ştiind că:

a) $f(0) = 0$ şi $f(n) \ne 0$ pentru orice număr natural nenul *n*;

b) $n^2 f(n) + m^2 f(m) = \left(f^2(n) + f^2(m) - f(n) \cdot f(m)\right) \cdot g(m+n)$, oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}$.

3. Fie rombul $ABCD$ de centru O şi punctul $N \in (AB)$. Prin N se construieşte o dreaptă paralelă cu BC care intersectează dreapta DC în M. Construim prin N o paralelă la AC care intersectează MB în E şi o paralelă la DB care intersectează MA în F. Notăm cu S mijlocul segmentului $[AB]$ şi $MS \cap EF = \{G\}$. Demonstraţi că:

a) $\frac{EB}{EM} + \frac{FA}{FM} = 1$;   b) G este centrul de greutate al triunghiului ABM;   c) $2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GN}$.

4. Fie triunghiul neisoscel ABC, P un punct în interiorul triunghiului, AP∩BC={D}, BP∩AC={E}, CP∩AB={F}. Se consideră $D_1 \in (AB)$ şi $D_2 \in (AC)$ picioarele bisectoarelor unghiurilor ∢ADB şi ∢ADC, $E_1 \in (BC)$ şi $E_2 \in (BA)$ picioarele bisectoarelor unghiurilor ∢BEC şi ∢BEA, iar $F_1 \in (CA)$ şi $F_2 \in (CB)$ picioarele bisectoarelor unghiurilor ∢CFA şi ∢CFB. Dacă $\{A'\} = D_1D_2 \cap BC$, $\{B'\} = E_1E_2 \cap AC$ şi $\{C'\} = F_1F_2 \cap AC$, să se arate că A', B', C' sunt puncte coliniare.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.