



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – etapa locală

9.02.2013

CLASA a V-a

1.a) Determinați perechile (x, y) de numere naturale care satisfac egalitatea:

$$\{25 - 3 \cdot [2 + (3 + x) : 3]\} \cdot \{[6 \cdot (y - 2) - 9] : 3 - 4\} = 7 .$$

b) Calculați suma: $1+3+5+\dots+2013$.

2. Determinați mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

I) $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$,

II) $A - B = \{a, b\}$,

III) $\text{card}(A \cap B) < \text{card}(B - A)$.

3. Aflați trei numere naturale cu suma 54, știind că dacă îl împărțim pe al doilea la primul obținem câtul 2 și restul 1, iar dacă îl împărțim pe al treilea la diferența primelor două, obținem tot câtul 2 și restul 1.

4. Se dau numerele $x = 7^{2013} + 3$ și $y = 9^{2013} + 1$. Arătați că x și y au cel puțin trei divizori comuni , diferiți de 1.

(G.M.nr.9 / 2012)

Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 7 puncte.

BAREM DE NOTARE

Problema Nr.1

Barem de corectare orientativ	Punctaj
1.a	1p
Scrie prima paranteză egală cu 1 și a doua paranteză egală cu 7 și reciproc!	
Rezolvă ecuațiile: $\{25 - 3[2 + (3 + x) : 3]\} = 1$ și $\{[6(y - 2) - 9] : 3 - 4\} = 7$: și găsește $x = 15, y = 9$.	1,5p
Rezolvă ecuațiile: $\{25 - 3[2 + (3 + x) : 3]\} = 7$ și $\{[6(y - 2) - 9] : 3 - 4\} = 1$ și găsește $x = 9, y = 6$.	1,5p
1.b	1p
Scrie: $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2013 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 2012 + 2013) - (2 + 4 + 6 + \dots + 2012)$	1p
Scrie : $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 2013 = (2013 \cdot 2014) / 2 = 2013 \cdot 1007$	1p
Scrie suma: $2 + 4 + 6 + \dots + 2012 = 2(1 + 2 + 3 + \dots + 1006) = 2 \cdot (1006 \cdot 1007) / 2 = 1006 \cdot 1007$; finalizare $S = 1007^2$	1p

Problema Nr.2

Barem de corectare orientativ	Punctaj
Din II) $\Rightarrow a \in A; a \notin B; b \in A; b \notin B$	1p
Din I) și III) $\Rightarrow \text{card}(A \cap B) = 1$ și $\text{card}(B - A) = 2$ (A și B nedisjuncte) sau $\text{card}(A \cap B) = 0$ și $\text{card}(B - A) = 3$ (A, B disjuncte)	1p
Se iau pe rând cazurile $c \in A \cap B, d \in A \cap B, e \in A \cap B$, respectiv $A \cap B = \emptyset$	1p
Se obțin soluțiile $A = \{a, b, c\}, B = \{c, d, e\}$	1p
$A = \{a, b, d\}, B = \{c, d, e\}$	1p
$A = \{a, b, e\}, B = \{c, d, e\}$	1p
$A = \{a, b\}, B = \{c, d, e\}$	1p

Problema nr.3

Barem de corectare orientativ	Punctaj
Relația din teorema împărțirii cu rest $D=C \cdot I+R$	1p
Pentru notația celor trei numere a, b, c: $b=2a+1$ (1)	1p
$c=2(b-a)+1$ (2) unde $b>a$	1p
Se calculează înlocuind b din relația (1) în (2): $c=2b-2a+1=2(2a+1)-2a+1$ $c=2a+3$ (3)	1p
Se calculează suma: $a+b+c=a+(2a+1)+(2a+3)=5a+4$	1p
Se află a din ecuația: $5a+4=54 \Rightarrow a=10$	1p
Se calculează: $b=21; c=23$	1p

Problema nr.4

Barem de corectare orientativ	Punctaj
Calculează ultima cifră a numărului 7^{2013} : $7^0 = 1, 7^1 = 7, 7^2 = \dots 9, 7^3 = \dots 3, 7^4 = \dots 1$ astfel $U(7^{2013})=7$ $U(x)=7+3=\dots 0;$	3p
Calculează ultima cifră a numărului 9^{2013} $9^0 = 1, 9^1 = 9, 9^2 = \dots 1, 9^3 = \dots 9$ astfel $U(9^{2013})=\dots 9$ $U(x)=9+1=\dots 0;$	3p
$D_x \cap D_y \in \{2, 5, 10\}$	1p