OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2013
Clasa a X-a

Subiecte:

1. Fie $a, b, c \in (0,1)$. Să se demonstreze inegalitățile:
   a) $\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 1$

   b) $\log_a \frac{3abc}{ab+bc+ca} + \log_b \frac{3abc}{ab+bc+ca} + \log_c \frac{3abc}{ab+bc+ca} \geq 3$

2. Se consideră numerele complexe z_1, z_2, z_3 cu proprietățile $|z_1|=|z_2| = |z_3|= 1$ și $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.
   a) Să se calculeze $(z_1 - 1)(z_2 - 1)(z_3 - 1)$
   b) Să se calculeze ${z_1}^{2013} + {z_2}^{2013} + {z_3}^{2013}$

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 20^x - 5^x - 4^x$
   a) Să se arate că $f(x) \geq -1, \forall\, x \in \mathbb{R}$
   b) Să se arate că f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, \infty)$
   c) Să se rezolve ecuația $f(x) = 359$

4. Să se determine funcțiile injective $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ cu proprietatea că

$$f(n) = \left[\frac{f(1)}{2}\right] + \left[\frac{f(2)}{3}\right] + \left[\frac{f(3)}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{f(n)}{n+1}\right], \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

Burtea Marius, Alexandria, Teleorman

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă de la 0 la 7 puncte.