

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, 16.02.2013
Clasa a XII-a

Subiecte:

1. Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f_n(x, y) = ((-1)^n x + n, (-1)^n y)$, $n \in \mathbb{Z}$ și mulțimea $F = \{f_n | n \in \mathbb{Z}\}$.
 - a) Arătați că F este parte stabilă față de compunerea funcțiilor.
 - b) Studiați dacă perechea (F, \circ) formează grup comutativ, unde “ \circ ” reprezintă compunerea funcțiilor.

Burtea Marius, Alexandria, Teleorman

2. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = AX$. Să se arate că f este automorfism al grupului $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ dacă și numai dacă matricea A este inversabilă.
3. Să se calculeze:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x + \sin x}{\sin x + \cos x + 1} dx$$

4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, unde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, cu proprietatea că există $a > 0$ astfel încât

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

- a) Determinați $E = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) + f(0) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$

- b) Arătați că ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right]$

Traian Ianculescu, Zimnicea, Teleorman