Olimpiada Nationala de Matematica
etapa locala- 16 februarie 2013
Clasa a IX-a

Subiecte Varianta 3

1. a) Să se rezolve ecuația $[x]\cdot\{x\}=x$

**
*

b) Fie $n>3$ un număr natural. Se consideră n mulțimi, fiecare având câte două elemente, astfel încât intersecția oricăror două din ele este o mulțime cu un singur element. Să se arate că intersecția tuturor celor n mulțimi este nevidă.

Severius Moldoveanu, București

2. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=3$. Arătați că:

$$\frac{a}{a+3}+\frac{b}{b+3}+\frac{c}{c+3}\leq\frac{3}{4}$$

Marin Chiroiu, Pitești

3. Fie M un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC, diferit de vârfurile triunghiului și H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor MBC, MAC *și respectiv* MAB.
   a) Arătați că triunghiurile ABC și $H_1H_2H_3$ sunt congruente și au laturile respectiv paralele.
   b) Arătați că M este centrul de greutate al triunghiului $H_1H_2H_3$ dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

Nicolae Papacu, Slobozia și Sorin Ulmeanu, Pitești

4. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale astfel încât $a_1=a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+\frac{a_n}{2^n}$ pentru orice $n\geq 1$. Arătați că $a_n<3$ pentru orice număr natural $n\geq 1$

***

NOTA : Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se noteaza de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se va redacta pe o foaie separată.