



## Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană și a Municipiului București, 9 Martie 2012

### CLASA a X-a

**Problema 1.** Fie  $a, b \in \mathbb{R}$  și  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  astfel încât  $|a - b| = |a + b - 2z|$ .

a) Să se arate că ecuația  $|z - a|^x + |\bar{z} - b|^x = |a - b|^x$ , cu necunoscuta  $x \in \mathbb{R}$ , are soluție unică.

b) Să se rezolve inecuația  $|z - a|^x + |\bar{z} - b|^x \leq |a - b|^x$ , cu necunoscuta  $x \in \mathbb{R}$ .

Gazeta Matematică

**Problema 2.** Fie  $a, b \in \mathbb{C}$ . Să se arate că  $|az + b\bar{z}| \leq 1$ , pentru orice  $z \in \mathbb{C}$ , cu  $|z| = 1$ , dacă și numai dacă  $|a| + |b| \leq 1$ .

**Problema 3.** Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x \in \mathbb{Q} \\ bx, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

unde  $a$  și  $b$  sunt două numere reale nenule.

Să se arate că  $f$  este injectivă dacă și numai dacă  $f$  este surjectivă.

**Problema 4.** Fie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Să se arate că numărul

$$2\sqrt{2}^n \cos \left( n \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

este număr întreg impar.

*Timp de lucru 4 ore.*

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*