Ministerul Educaţiei Naţionale
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 9 Martie 2012

CLASA a XI-a

Problema 1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir crescător şi mărginit. Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty}(2a_n - a_1 - a_2)(2a_n - a_2 - a_3)\cdots(2a_n - a_{n-2} - a_{n-1})(2a_n - a_{n-1} - a_1).$$

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie matricele de ordin 2 cu elemente reale A şi B astfel încât

$$AB = A^2B^2 - (AB)^2 \quad \text{şi} \quad \det(B) = 2.$$

a) Arătaţi că matricea A nu este inversabilă.
b) Calculaţi $\det(A + 2B) - \det(B + 2A)$.

Problema 3. Fie A o matrice neinversabilă de ordin n, $n > 1$, cu elemente în mulţimea numerelor complexe, toate elementele având modulul egal cu 1.
a) Arătaţi că pentru $n = 3$, două dintre liniile sau două dintre coloanele matricei A sunt proporţionale.
b) Rămâne adevărată concluzia de la punctul anterior pentru $n = 4$?

Problema 4. Se consideră o funcţie monotonă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
a) Demonstraţi că f are limite laterale în fiecare punct $x_0 \in \mathbb{R}$.
b) Definim funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \lim\limits_{t\nearrow x} f(t)$, i.e. $g(x)$ este limita la stânga în punctul x. Arătaţi că dacă funcţia g este continuă, atunci funcţia f este continuă.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.