Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a IX-a

1. a) Fie $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ şi $x, y, z \in [a, b]$. Demonstrați că media aritmetică a numerelor x, y şi z se găseşte de asemenea în intervalul $[a, b]$.

b) Fie A_1, A_2, A_3 trei puncte necoliniare. Notăm $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{u}$ şi $\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{v}$. Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 4$, notăm cu A_n centrul de greutate al triunghiului $A_{n-1}A_{n-2}A_{n-3}$, iar pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, considerăm $x_n, y_n \in \mathbf{R}$ astfel încât $\overrightarrow{A_1A_n} = x_n\vec{u} + y_n\vec{v}$.

i. Calculați x_6 şi y_6.

ii. Arătați că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 5$, avem $x_n \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$ si $y_n \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

Prof. Daly Marciuc

2. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir definit prin: $a_1 = \frac{1}{2}$ şi $a_{n+1} + a_n = \frac{2}{n^2+2n}$, $\forall\, n \geq 1$.

a. Aflați termenul general al sirului.

b. Calculați suma $S = \sum_{k=1}^{n}(2k+1)a_k^2$ şi arătați că $S < 1$.

Prof. Traian Tămâian

3. Considerăm paralelogramul $ABCD$ şi fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Fie punctul M pe segmentul $[AD]$ şi fie punctul D pe segmentul $[NC]$. Să se arate că punctele G, M, N sunt coliniare dacă şi numai dacă $\frac{CN}{ND} - \frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$.

Gazeta Matematică

4. În triunghiul ABC cu m$(\sphericalangle ACB) = 90°$, considerăm punctele M∈(BC), Q∈(AB) respectiv

N∈(AC) astfel încât MQNC să fie dreptunghi. Dacă punctele I şi G sunt centrul cercului înscris triunghiului ABC, respectiv centrul dreptunghiului MQNC, demonstrați că punctele A, I, G sunt coliniare dacă şi numai dacă AQ = AC.

Prof. Alexandru Blaga

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a IX-a

1. a) Legyenek $az\ a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ számok és x, $y, z \in [a, b]$. Bizonyítsátok be, hogy az x, y és z számok számtani közeparányosa is eleme az $[a, b]$ intervallumnak.

b) Legyenek az A_1, A_2, A_3 nem kollineáris pontok. Jelöljük $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{u}$ és $\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{v}$. Bármely $n \in$ **N**, $n \geq 4$ esetén az $A_{n-1}A_{n-2}A_{n-3}$ háromszög súlypontját jelöljük $A_n - nel$, valamint bármely $n \in$**N*** esetén legyenek az $x_n, y_n \in$ R úgy, hogy $\overrightarrow{A_1A_n} = x_n\vec{u} + y_n\vec{v}$.

i. Számítsátok ki x_6 és y_6.

ii. Mutassátok ki, hogy bármely $n \in$ **N**, $n \geq 5$ esetén $x_n \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$ és $y_n \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

Prof. Daly Marciuc

2. Legyen $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat úgy, hogy : $a_1 = \frac{1}{2}$ és $a_{n+1} + a_n = \frac{2}{n^2+2n}$, $\forall\, n \geq 1$.

a. Határozzátok meg a sorozat általános tagját..

b. Számítsátok ki az $S = \sum_{k=1}^{n}(2k+1)a_k^2$ összeget és igazoljátok, hogy $S < 1$.

Prof. Traian Tămâian

3. Legyen $ABCD$ paralelogramma és G az ABC háromszög súlypontja . Legyen M az $[AD]$ szakasz egy pontja és D az $[NC]$ szakasz egy pontja. Igazoljátok, hogy G, M, N pontok akkor és csak akkor kollineárisak, ha $\frac{CN}{ND} - \frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$.

Gazeta Matematică

4. Az ABC háromszögben m($< ACB) = 90°$. Legyen M∈(BC), Q∈(AB) illettve N∈(AC) úgy, hogy MQNC téglalap. Ha I az ABC háromszögbe írt kör középpontja és G az MQNC téglalap középpontja, igazoljátok, hogy az A, I és G pontok akkor és csak akkor kollineárisak, ha AQ = AC.

Prof. Alexandru Blaga

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a IX-a

1. a) Es sei $a, b \in$**R**, $a < b$ und $x, y, z \in [a, b]$. Beweist dass, das aithmetische Mittel der Zahlen x, y und z auch in die Intervall $[a, b]$ sind.

b) Es sei A_1, A_2, A_3drei nicht kollinerae Punkten. Bezeichnet man $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{u}$ und $\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{v}$. Für jedwelche $n \in$**N**, $n \geq 4$, bezeichnet man A_n der Schwerpunkt des Dreiecks $A_{n-1}A_{n-2}A_{n-3}$, aber für jede $n \in$**N***, nimmt man x_n, $y_n \in$ **R** so, dass $\overrightarrow{A_1A_n} = x_n\vec{u} + y_n\vec{v}$.

i. Berechnet x_6 und y_6.

ii. Zeigt, dass für jede $n \in$ **N**, $n \geq 5$, gibt es $x_n \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right]$ und $y_n \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

Prof. Daly Marciuc

2. Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge die durch : $a_1 = \frac{1}{2}$und $a_{n+1} + a_n = \frac{2}{n^2+2n}$, $\forall n \geq 1$ defieniert ist.

a. Bestimmt die allgemeine Glied der Folge.

b. Berechnet die Summe $S = \sum_{k=1}^{n}(2k+1)a_k^2$und zeigt dass $S < 1$.

Prof. Traian Tămâian

3. Es sei das Parallelogramm $ABCD$ und G Schwerpunkt des Dreiecks ABC. Es sei der Punkt M auf die Strecke $[AD]$und der Punkt Dauf die Strecke $[NC]$. Zeigt, dass die Punkten G, M, N kollinear sind wenn und nur wenn $\frac{CN}{ND} - \frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$.

Gazeta Matematică

4. Im Dreieck ABC mit m($\sphericalangle ACB) = 90°$, nehmen die Punkten M∈(BC), Q∈(AB) bzw. N∈(AC)

so, dass MQNC Rechteck sei. Wenn die Punkten I und G die Mitellpunkt des Inkreises des

Str. 1 Decembrie 1918 nr. 6
Cod 440010 Satu Mare
Tel. +40 (0)261712175
Fax: +40 (0)261713441
www.isj.sm.edu.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

Dreiecks ABC, bzw Mitellpunkt des Rechtecks MQNC sind, beweist dass die Punkten A, I, G kollinear sind wenn und nur wenn AQ = AC.

Prof. Alexandru Blaga

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a X-a

I. a. Arătați că $\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}\geq 6, \quad \forall a,b,c\in(0,\infty)$

b. Rezolvați inecuația $18^x+12^x+9^x+3^x+4^x+2^x\leq 6\cdot 6^x$

Prof. Galambosi Csaba, Satu Mare

II. a. Fie $f:\Re\to\Re$ o funcție cu proprietatea $f(f(x))+2012\cdot f(x)=x^{2013}, \quad \forall x\in\Re$.
Demonstrați că f este injectivă.

b. Există funcții $f:(1\,;\infty)\to\Re$, injective, astfel încât $f(x)+f(2^x)+f(\log_2 x)=2013$, pentru orice $x\in(1\,;\,\infty)$?

Prof. Tămîian Traian, Carei

III. Fie numerele complexe distincte a,b,c,d cu $a+b+c+d=0$ şi $|a|=|b|=|c|=|d|$. Să se arate că: a). $(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d)=0$

b). Dacă $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}=\{a,b,c,d\}$ şi $\alpha+\beta=0$ să se arate că a,b,c,d sunt rădăcinile ecuației $z^4+(\alpha\beta+\gamma\delta)\cdot z^2+\alpha\beta\gamma\delta=0$

Prof. Pop Ovidiu, Satu Mare

IV. Fie patrulaterul *ABCD* inscriptibil cu laturile de lungimi a,b,c,d şi diagonalele de lungimi d_1 şi d_2. Să se demonstreze că $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{da}\geq 4\left(\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}\right)$.

Prof. Buth Gigel, Satu Mare
Matematician. Râmbu Gelu, Baia Mare

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a X-a

I. a. Igazold, hogy $\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}\ge 6, \quad \forall a,b,c\in(0,\infty)$

b. Oldd meg a következő egyenlőtlenséget: $18^x+12^x+9^x+3^x+4^x+2^x\le 6\cdot 6^x$

Prof. Galambosi Csaba, Satu Mare

II. a. Adott az $f:\Re\to\Re$ függvény, amely a következő tulajdonsággal rendelkezik:
$f(f(x))+2012\cdot f(x)=x^{2013}, \quad \forall x\in\Re$.

Igazold, hogy f injektiv.

b. Léteznek olyan $f:(0,\infty)\to\Re$ injektiv függvények, melyekre

$$f(x)+f(2^x)+f(\log_2 x)=2013, \qquad \forall x\in(0,\infty) \text{ ?}$$

Prof. Tămîian Traian, Carei

III. Adottak az a,b,c,d különböző komplex számok úgy, hogy $a+b+c+d=0$ és $|a|=|b|=|c|=|d|$.

Igazold, hogy a). $(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d)=0$

b). Ha $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}=\{a,b,c,d\}$ és $\alpha+\beta=0$ mutasd meg, hogy a,b,c,d az $z^4+(\alpha\beta+\gamma\delta)\cdot z^2+\alpha\beta\gamma\delta=0$ egyenlet gyökei.

Prof. Pop Ovidiu, Satu Mare

IV. Adott az $ABCD$ körbeírható négyszög, melynek oldalainak hossza a,b,c,d és átlóinak hossza d_1 és d_2. Igazold, hogy $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{cd}+\frac{1}{da}\ge 4\left(\frac{1}{d_1^2}+\frac{1}{d_2^2}\right)$.

Prof. Buth Gigel, Satu Mare
Matematician. Râmbu Gelu, Baia Mare

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a XI-a

1. a) Fie $A \in M_2(C)$.Arătaţi că $\det(A - xI_2) = x^2 - (TrA)x + \det A$, pentru orice $x \in C$.

3puncte

b) Dacă $A \in M_2(C)$ cu $TrA = 2$ şi $\det A = 3$ demonstrați că:

$2 \cdot \det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + 3I_2) = 4.$ 4 puncte

prof. Traian Tămîian, Carei

2. Dacă A,B$\in M_2(C)$ astfel încât det(AB+BA)-det(AB-BA)=4·detA·detB, să se arate că:

a.) det(AB-BA)=0 4 puncte

b.) $(AB - BA)^2 = O_2$ 3 puncte

prof. Ovidiu Pop, Satu Mare

3. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ unde $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{n} + 2, \, daca \ n \ este \ par \\ a_n + \frac{2}{n}, \, daca \ n \ este \ impar \end{cases}$.

Arătaţi că $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ 7 puncte

RMT

4. Se consideră şirul de numere naturale $(a_n)_{n\geq 1}$,unde a_1=2 şi $a_{n+1} = \frac{2n+3-n!\cdot a_n}{(n+1)!}, n \geq 1.$

a.) Arătați că şirul este convergent. 4 puncte

b.) Calculați $\lim_{n\to\infty} n \cdot \ln[(n-1)!\cdot a_n]$ 3 puncte

prof. Bud Adrian, Negreşti-Oaş

Str. 1 Decembrie 1918 nr. 6
Cod 440010 Satu Mare
Tel. +40 (0)261712175
Fax: +40 (0)261713441
www.isj.sm.edu.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucuresti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a XI-a

I) Adott a következő halmaz: $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 7b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in Z \right\}$

a) Bizonyítsuk be, hogy $(M, \cdot)$ monoid.

b)Legyen $A \in M$ és $X \in M_2(Z)$. Ha $AX = XA$, akkor igazoljuk, hogy $X \in M$ vagy létezik $\alpha \in Z$ úgy, hogy $A = \alpha \cdot I_2$.

c) Igazoljuk, hogy M –nek végtelen sok invertálható eleme van.

G.M. 10/2012

II) Legyen $(G,\cdot)$ csoport, melynek semleges eleme e, és $x, y \in G$, úgy, hogy $x^2 = y^2 = (xy)^2$.

Igazoljuk, hogy: a) $y^4 = e$

b) $x^{2013} + y^{2013} = x + y$.

c) $(xy)^{2012} = e$.

Prof. *Traian Tămîian*

III) a) Ellenőrizzük a következő azonosságot : $\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)' = -\frac{\sqrt{x}}{(x-\sqrt{x})^2}, \forall x \in (1,\infty)$.

b) Számítsuk ki: $\int \frac{x^2 - x - \sqrt{x}}{(x-\sqrt{x})^2} \cdot e^x dx, \quad x \in (1,\infty)$.

Prof.*Adrian Bud*

IV) Legyen $a > 0$ és az $f : [0,a] \to R$ a $[0,a]$-n kétszer deriválható függvény , melynek a másodrendű deriváltja folytonos a $[0,a]$ intervallumon, és $f(a) = f'(a) = 0$. Mutassuk ki, hogy bármely $k \in \{1, 2\}$ esetén fennállnak az alábbi összefüggések:

a) $\int_0^a f(x)dx = \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \int_0^a x^k f^{(k)}(x)dx,$

b) $(\int_0^a f(x)dx)^2 \le \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)(k!)^2} \cdot \int_0^a (f^{(k)}(x))^2 dx$.

Prof. *Gigel Buth* és *Gelu Râmbu* matematikus

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a XII-a

I) Fie mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 7b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in Z \right\}$

a) Demonstrați ca $(M, \cdot)$ este monoid.

b)Fie $A \in M$ si $X \in M_2(Z)$. Arătați că dacă $AX = XA$, atunci $X \in M$ sau există $\alpha \in Z$ astfel încât $A = \alpha \cdot I_{2.}$

c) Demonstrați că M are o infinitate de elemente inversabile.

G.M. 10/2012

II) Fie $(G, \cdot)$ un grup cu e elementul neutru și $x, y \in G$, astfel încât $x^2 = y^2 = (xy)^2$.

Arătați că: a) $y^4 = e$

b) $x^{2013} \cdot y^{2013} = xy$

c) $(xy)^{2012} = e$.

Prof. *Traian Tămîian*

III) a) Verificați identitatea : $\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)^{/} = -\dfrac{\sqrt{x}}{(x-\sqrt{x})^2}, \forall x \in (1, \infty)$.

b) Calculați $\displaystyle\int \frac{x^2 - x - \sqrt{x}}{(x-\sqrt{x})^2} \cdot e^x dx$, $\quad x \in (1, \infty)$.

Prof.*Adrian Bud*

IV) Fie $a > 0$ si functia $f : [0, a] \to R$, de doua ori derivabila pe $[0, a]$, cu derivate a doua continuă pe $[0, a]$ și $f(a) = f^{/}(a) = 0$. Să se arate că pentru orice $k \in \{1, 2\}$ au loc relațiile

a) $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \int_0^a x^k f^{(k)}(x)dx,$

b) $\displaystyle(\int_0^a f(x)dx)^2 \le \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)(k!)^2} \cdot \int_0^a (f^{(k)}(x))^2 dx$.

Prof. *Gigel Buth* și matematician *Gelu Râmbu*

Olimpiada de matematică

etapa locală, 16.02.2013

Clasa a XII-a

I) Adott a következő halmaz: $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 7b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in Z \right\}$

a) Bizonyítsuk be, hogy $(M, \cdot)$ monoid.

b)Legyen $A \in M$ és $X \in M_2(Z)$. Ha $AX = XA$, akkor igazoljuk, hogy $X \in M$ vagy létezik $\alpha \in Z$ úgy, hogy $A = \alpha \cdot I_2$.

c) Igazoljuk, hogy M –nek végtelen sok invertálható eleme van.

G.M. 10/2012

II) Legyen $(G,\cdot)$ csoport, melynek semleges eleme e, és $x, y \in G$, úgy, hogy $x^2 = y^2 = (xy)^2$.

Igazoljuk, hogy: a) $y^4 = e$

b) $x^{2013} + y^{2013} = x + y$.

c) $(xy)^{2012} = e$.

Prof. *Traian Tămîian*

III) a) Ellenőrizzük a következő azonosságot : $\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\right)' = -\dfrac{\sqrt{x}}{(x-\sqrt{x})^2}, \forall x \in (1,\infty)$.

b) Számítsuk ki: $\displaystyle\int \frac{x^2 - x - \sqrt{x}}{(x-\sqrt{x})^2} \cdot e^x dx, \quad x \in (1,\infty)$.

Prof.*Adrian Bud*

IV) Legyen $a > 0$ és az $f : [0,a] \to R$ a $[0,a]$ -n kétszer deriválható függvény , melynek a másodrendű deriváltja folytonos a $[0,a]$ intervallumon, és $f(a) = f'(a) = 0$. Mutassuk ki, hogy bármely $k \in \{1, 2\}$ esetén fennállnak az alábbi összefüggések:

a) $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \int_0^a x^k f^{(k)}(x)dx,$

b) $\displaystyle\left(\int_0^a f(x)dx\right)^2 \le \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)(k!)^2} \cdot \int_0^a (f^{(k)}(x))^2 dx$.

Prof. *Gigel Buth* és *Gelu Râmbu* matematikus