Concursul de matematică „NICOLAE COCULESCU“ 2011-12

EDIŢIA a VIII-a SLATINA – 29 noiembrie 2012

Clasa a III-a

1. Numere, numere.

a) Cinci prieteni se întâlnesc. Ei se salută, fiecare dând mâna cu fiecare, o singură dată. Câte strângeri de mână au loc?

b) Aflaţi numerele impare de trei cifre care au cifra sutelor egală cu 5, cifra zecilor pară şi suma cifrelor egală cu 14.

Soluţie. a) 10. b) 509, 527, 545, 563, 581.

2. Căsuţa lui Apolodor. Apolodor şi-a construit o căsuţă pe care a pus un număr. Vrei să afli ce număr are? Pentru asta trebuie să ştii că dacă scazi numărul căsuţei din cel mai mic număr de trei cifre diferite, iar apoi adaugi cel mai mic număr de două cifre diferite, obţii 55.

Soluţie. 57.

3. Codul secret. Dacă descifrezi următorul mesaj, vei găsi o comoară. Fiecare literă din mesajul codificat

NE PLACE COCULESCU

reprezintă câte o cifră diferită de zero. Fiind un cod secret, litere diferite pot reprezenta cifre egale. Aflaţi codul fiecărei litere, folosind următoarele informaţii:

a) $N = 3 \times 2 + 4 - 7$;

b) suma literelor primului cuvânt al mesajului este 10;

c) suma vocalelor din al doilea cuvânt al mesajului este 15;

d) P este egal cu numărul de litere din al treilea cuvânt al mesajului;

e) L este un sfert din suma dintre P şi E;

f) C este "răsturnatul" literei P;

g) O este cu 3 mai mic decât C şi cu doi mai mic decât U;

h) S este egal cu C + U − P.

Dacă ai calculat corect, află că acea comoară eşti chiar tu!

Cristina Dumitrache, C.N.I.M. Slatina

Soluţie. N=3, E=7, P=9, L=4, A=8, C=6, O=3, U=5, S=2

4. Cinci prieteni la concurs. Alin, Bogdan, Ciprian, Dan şi Eugen au fost la un concurs unde s-au dat 4 probleme. Pentru o problemă complet rezolvată se acordă 7 puncte, pentru una rezolvată parţial se primesc 5 sau 3 puncte, iar pentru o problemă nerezolvată se acordă 0 puncte. Arătaţi că:

a) unul din cei cinci prieteni poate obţine 16 puncte;

b) este posibil ca Alin, care a rezolvat complet două probleme, să fie întrecut de Bogdan, care nu a rezolvat complet nicio problemă;

c) este posibil ca Ciprian şi Dan să aibă acelaşi punctaj, deşi Ciprian a rezolvat complet trei probleme, iar Dan a rezolvat complet doar două probleme;

d) dacă Eugen a obţinut 17 puncte, atunci a rezolvat măcar o problemă complet.

Soluţie. a) $7 + 3 + 3 + 3 = 16$

b) $7 + 7 + 0 + 0 < 5 + 5 + 5 + 3$

c) $7 + 7 + 7 + 3 = 7 + 7 + 5 + 5$

d) dacă nu ar fi rezolvat complet nicio problemă, punctajele fiecărei probleme sunt egale cu 0, 3 sau 5. Cel puţin două probleme au punctaj egal cu 5, altfel suma e cel mult 14. Punctajul însumat la celelalte două probleme nu poate fi egal cu 7.

Clasa a IV-a

1. Numere, numere. Determinaţi suma numerelor naturale a şi b pentru care

$$30 \times 8 - 360 : (a \times b) = 12 \times (12 + 48 : 16) \, .$$

Câte soluţii are problema?

Soluţie. Avem $a \times b = 6$. Cum $6 = 1 \times 6 = 2 \times 3$, suma numerelor a şi b poate lua 2 valori: 7 şi 5.

2. La măsurat! Gigel s-a hotărât să-şi măsoare camera folosind diverse obiecte. A găsit bâta de baseball a tatălui său care era de două ori mai lungă decât rigla sa de 20 cm. A măsurat o parte din peretele lung, care era cât cinci bâte de baseball, apoi a găsit un pantofior de când avea doi ani care avea un sfert din lungimea unei bâte şi a măsurat zece pantofiori până s-a terminat restul peretelui. Peretele cel scurt era cât opt pantofiori şi trei bâte de baseball. Aflaţi care este perimetrul camerei lui Gigel (în centimetri şi în metri).

Cristina Dumitrache, C.N.I.M. Slatina

Soluţie. $20 \times 2 = 40$ cm lungimea bâtei de baseball
$40 : 4 = 10$ cm lungimea pantofiorului
$L = L_1 + L_2$
$L_1 = 40 \times 5 = 200$ cm
$L_2 = 10 \times 10 = 100$ cm
$L = 200 + 100 = 300$ cm $= 3$ m
$l = l_1 + l_2$
$l_1 = 8 \times 10 = 80$ cm
$l_2 = 3 \times 40 = 120$ cm
$l = 80 + 120 = 200$ cm $= 2$ m
$P = 2 \times L + 2 \times l = 2 \times 300 + 2 \times 200 = 600 + 400 = 1000$ cm $= 10$ m.

3. Modelino. Carina şi Andrada s-au apucat să modeleze animale şi păsări din plastilină. Au modelat 27 de biluţe reprezentând capete de căţei, urşi şi pui. A venit şi David care s-a apucat să modeleze picioarele, toate 84. Nu le-a mai rămas multă plastilină, aşa că au făcut codiţe de pui de două ori mai multe decât cele de căţei, iar urşii au rămas, cum credeţi? Fără coadă... Câţi urşi, căţei şi pui au modelat cei trei copii ?

Cristina Dumitrache, C.N.I.M. Slatina

Soluţie. 12 pui, 6 căţei, 9 urşi

4. Poveşti. Maria a citit în vacanţă 6 poveşti, în total 71 de pagini. Numărul de pagini al primelor două poveşti reprezintă numere consecutive impare. Următoarele două însumează 25 de pagini, a treia având un sfert din numărul de pagini al celeilalte. A cincea are cu 18 pagini mai mult decât a şasea şi de 4 ori mai multe. Câte pagini are fiecare poveste citită de Maria?

Soluţie. Cele 6 poveşti au 7, 9, 5, 20, 24 şi respectiv 6 pagini.

Clasa a V-a

1. Notăm cu $S(n)$, $U(n)$ suma cifrelor numărului natural n, respectiv ultima cifră a sa. Determinaţi numerele naturale n care au proprietatea
$$n + S(n) + U(n) = 2012.$$

Florian Dumitrel

Soluţie. Este clar că n are patru cifre, deci $n = \overline{abcd}$. Din ipoteză obţinem
$$1001a + 101b + 11c + 3d = 2012,$$
de unde rezultă $a \in \{1, 2\}$. **(3p)**

În cazul $a = 1$ avem $101b + 11c + 3d = 1011$, de unde obţinem $b = 9$ şi $11c + 3d = 102$. Rezultă $c = 9$ şi $d = 1$. **(2p)**

Dacă $a = 2$, atunci $101b + 11c + 3d = 10$, de unde rezultă $b = c = 0$ şi $3d = 10$, ceea ce nu este posibil. **(2p)**

Aşadar, $n = 1991$ este unica soluţie a problemei.

2. Copiii din clasa noastră au 12 sau 13 ani. Toţi împreună au 316 ani. Aflaţi câţi copii sunt în clasă şi câţi au 12, respectiv 13 ani.

S.L.T.

Soluţie. Dacă sunt n copii în clasă, suma vârstelor lor este cuprinsă între $12n$ şi $13n$, deci $12n < 316 < 13n$. Rezultă $n = 25$ sau $n = 26$. **(3p)**

Pentru $n = 25$ se obţine că în clasă sunt 9 copii de 12 ani şi 16 de 13 ani. **(2p)**

Pentru $n = 26$ se obţine că în clasă sunt 22 copii de 12 ani şi 4 de 13 ani. **(2p)**

3. Arătaţi că mulţimea $\{1, 2, 3, ..., 143\}$ se poate scrie ca reuniunea a trei mulţimi A, B, C, disjuncte două câte două, astfel încât $s(A) = 2s(B) = 3s(C)$, unde cu $s(M)$ s-a notat suma elementelor mulţimii M.

Florian Dumitrel

Soluţie. Notând $s(A) = a,\ s(B) = b,\ s(C) = c$, avem
$$a + b + c = 1 + 2 + 3 + ... + 143 = 10296 \text{ şi } a = 2b = 3c,$$
de unde rezultă $a = 5616,\ b = 2808$ şi $c = 1872$. **(2p)**

Determinăm cel mai mare număr natural p cu proprietatea
$$143 + 142 + 141 + ... + (143 - p) \leq 5616,$$
Relaţia precedentă se rescrie sub forma
$$143(p + 1) - (1 + 2 + 3 + ... + p) \leq 5616 \Leftrightarrow (p + 1)(286 - p) \leq 11232.$$
de unde obţinem $p = 45$. Cum $143 + 142 + 141 + ... + 98 = 5543$ şi $5616 - 5543 = 73$, putem lua $A = \{73\} \cup \{98, 99, ..., 143\}$.

Determinăm acum cel mai mare număr natural q cu proprietatea
$$1 + 2 + 3 + ... + q \leq 1872,$$
adică $\dfrac{q(q+1)}{2} \leq 1872$, de unde rezultă $q = 60$. Întrucât
$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + ... + 60 &= 1830, \\ 1872 - 1830 &= 42, \\ 59 + 60 + 42 &= 161 = 71 + 90, \end{aligned}$$
putem lua $C = \left\{1, 2, 3, ..., 58; \underbrace{71, 90}\right\}$. Rămâne $B = \{59, 60, 61, ..., 97\} \setminus \{71, 73, 90\}$. **(5p)**

4. Suma a 11 numere naturale, nenule, distincte este mai mică decât 96. Arătaţi că se pot alege două din ele cu suma 13.

Maria Pop

Soluţie. Să notăm mulţimea celor 12 numere cu M. Perechile cu suma 13 sunt (1,12), (2,11),. . . , (6,7), care conţin numerele de la 1 la 12. **(1p)**

Dacă şapte elemente din M se află în mulţimea $A = \{1, 2, ..., 12\}$, atunci două sunt în aceeaşi pereche şi problema este rezolvată. **(2p)**

Dacă cel mult şase dintre elementele lui M se află în A, suma acestora este cel puţin egală cu $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.

Celelalte cinci elemente ale lui M, nefiind în A, sunt toate mai mari sau egale cu 13 şi, fiind distincte, au suma cel puţin egală cu

$$13 + 14 + 15 + 16 + 17 = 75.$$

Ca urmare, suma elementelor lui M este cel puţin egală cu $21 + 75 = 96$, contradicţie cu ipoteza. **(4p)**

Clasa a VI-a

1. Determinaţi cel mai mic număr natural N care admite trei scrieri diferite de forma $N = 17a + 19b$, unde $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Dan Nedeianu

Soluţie. Din enunţ, rezultă că există numerele naturale nenule a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 astfel încât

$$n = 17a_1 + 19b_1 = 17a_2 + 19b_2 = 17a_3 + 19b_3.$$

Atunci $17(a_1 - a_2) = 19(b_2 - b_1)$, de unde rezultă că $19 \mid a_1 - a_2$, deci $19 \leq a_1 - a_2$. **(2p)** Analog, $19 \leq a_2 - a_3$, deci

$$a_3 \geq 19 + a_2 \geq 19 + 19 + a_1 \geq 38 + a_1 \geq 39. \quad \textbf{(2p)}$$

Prin urmare, $N = 17a_3 + 19b_3 \geq 17 \cdot 39 + 19 \cdot 1 = 682$. **(1p)**

Avem şi $682 = 17 \cdot 20 + 19 \cdot 18 = 17 \cdot 1 + 19 \cdot 35$, deci numărul căutat este 682. **(2p)**

2. Împărţind numărul natural 100 la două numere naturale pare consecutive se obţine acelaşi rest nenul.

Aflaţi suma resturilor obţinute prin împărţirea numerelor de la 1 la 100 la cele două numere pare considerate.

Marius Perianu

Soluţie. Fie $n = 2k$ şi $n + 2 = 2k + 2$ cele două numere pare consecutive.

Notând cu r restul nenul obţinut la împărţiri, din enunţ rezultă că n şi $n + 2$ sunt divizori ai lui $100 - r$.

Cum $[n, n + 2] = 2k(k + 1)$, rezultă că $2k(k + 1) \mid 100 - r$, deci $2k(k + 1) < 100$, de unde se obţine $k \leq 6$, adică $n \leq 12$. **(2p)**

Deoarece $r \neq 0$, rezultă că n şi $n + 2$ nu sunt divizori ai lui 100, deci n nu poate fi 2, 4, 8 sau 10. Rămân variantele:

a) $n = 6$, care este soluţie, întrucât se verifică faptul că la împărţirea lui 100 la 6 şi respectiv la 8 se obţine acelaşi rest: $r = 4$;

b) $n = 12$, care nu convine, întrucât restul împărţirii lui 100 la $n = 12$ este 4, iar restul împărţirii lui 100 la $n + 2 = 14$ este 2.

Ca urmare, avem o singură soluţie, şi anume $n = 6$. **(3p)**

Întrucât $100 : 6 = 16$, rest 4, rezultă că prin împărţirea la 6 a numerelor de la 1 la 100 se obţin 16 secvenţe de resturi în ordinea $(1, 2, 3, 4, 5, 0)$ şi încă o dată resturile 1, 2, 3 şi 4. Suma acestora este $16(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 0) + (1 + 2 + 3 + 4) = 250$.

De asemenea, cum $100 : 8 = 12$, rest 4, rezultă că prin împărţirea la 8 a numerelor de la 1 la 100 se obţin 12 secvenţe de resturi în ordinea $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0)$ şi încă o dată resturile 1, 2, 3 şi 4. Suma acestora este $12(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 0) + (1 + 2 + 3 + 4) = 346$.

Ca urmare, suma cerută în enunţ este $250 + 346 = 596$. **(2p)**

3. Fie AB şi CD două drepte concurente în punctul O. Fie $[OP$ bisectoarea unghiului $\widehat{AOC}$, $[OT$ bisectoarea unghiului $\widehat{POB}$ şi $[OR$ bisectoarea unghiului $\widehat{TOD}$. Ştiind că $m(\widehat{POR}) = 140°$, determinaţi măsura unghiului $\widehat{AOD}$.

Cătălin Stănică

Soluţie. Cu notaţiile din figură avem:

$[OT$ este bisectoarea unghiului $\widehat{POB} \Rightarrow \widehat{POT} \equiv \widehat{BOT} \Rightarrow x + y = z + u$ (1) **(1p)**

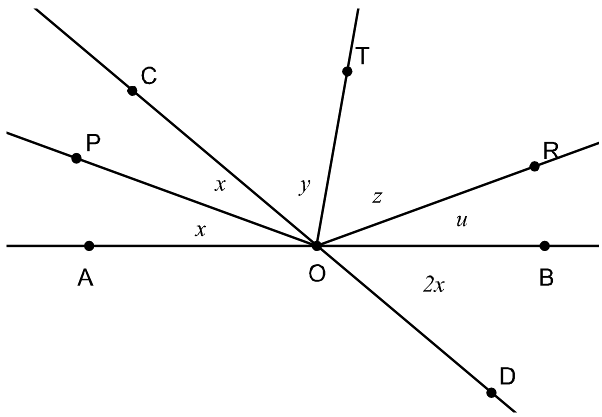
$[OR$ este bisectoarea unghiului $\widehat{TOD} \Rightarrow \widehat{ROT} \equiv \widehat{ROD} \Rightarrow z = u + 2x$ (2) **(1p)**

Deoarece $m(\widehat{POR}) = 140°$ rezultă $x + y + z = 140°$ şi, cum $180° = m(\widehat{AOB}) = x + m(\widehat{POR}) + u$, avem $x + u = 40°$. **(2p)**

Adunând z la ambii membrii ai relaţiei (1) rezultă $x + y + z = 2z + u$ şi, ţinând cont de (2) rezultă

$$140° = x + y + z = 2(u + 2x) + u = 3u + 4x = x + 3u + 3x = u + 3(u + x) = u + 3 \cdot 40°,$$

de unde se obţine $x = 20°$. Ca urmare, $m(\widehat{AOD}) = 180° - 2x = 140°$. **(3p)**



4. Determinaţi pătratele perfecte de forma $\overline{COCULESCU}$, scrise în baza 10, ştiind că acestea se divid cu 625, iar literele distincte semnifică cifre distincte.

Costel Anghel

Soluţie. Fie $N = \overline{COCULESCU}$. Fiind divizibil cu $625 = 5^4$, numărul N este divizibil cu 5, deci $U \in \{0, 5\}$. Dacă N ar fi pătrat perfect par, atunci ar fi divizibil cu 2^2 şi, fiind divizibil şi cu 5^2, ar rezulta $C = U = 0$, imposibil, deci $U = 5$. **(1p)**

Deoarece $N = \mathcal{M}_{10^4} + \overline{ESCU}$, deducem că $625 \mid \overline{ESCU}$, adică $\overline{ESCU} = 625p$, unde $1 \leq p \leq 15$, p impar. În plus, N este de forma $\mathcal{M}_8 + 1$ (fiind pătrat perfect impar), deci şi $\overline{ESCU} = 625p$ este de forma $\mathcal{M}_8 + 1$. Deoarece $625 = \mathcal{M}_8 + 1$, rezultă $p = \mathcal{M}_8 + 1$, adică $p \in \{1, 9\}$. Pentru $p = 9$, se obţine $\overline{ESCU} = 5625$, care nu convine, deoarece ar rezulta $E = U$. Rămâne că $p = 1$, adică $E = 0$, $S = 6$, $C = 2$, $U = 5$. **(3p)**

Pentru a evita confuziile, vom renota $O = x$, $L = y$ şi avem $\{x, y\} \subset \{1, 2, 4, 7, 8, 9\}$. Cum $N = 5^4 \left(16 \cdot \overline{2x25y} + 1\right)$, rezultă că numărul $n = 16 \cdot \overline{2x25y} + 1$ este pătrat perfect. Pentru $y \in \{1, 7\}$ rezultă $u(n) \in \{7, 3\}$, iar pentru $y \in \{4, 9\}$, obţinem $5 \mid n$ şi $25 \nmid n$, deci $y \in \{3, 8\}$.

Evitând perechile (x, y) pentru care n are forma $\mathcal{M}_3 + 2$ sau pentru care $3 \mid n$ şi $9 \nmid n$, rămân de analizat cazurile $(x = 9, y = 3)$, $(x = 1, y = 8)$, $(x = 4, y = 8)$ şi $(x = 7, y = 8)$.

Se obţine soluţia $x = 4,\ y = 8$, pentru care $n = 623^2$, iar $\overline{COCULESCU} = 242\,580\,625 = (25 \cdot 623)^2$. **(3p)**

Clasa a VII-a

1. Determinaţi numerele prime p pentru care $p\,(p+17)$ se poate scrie ca produsul a două numere naturale consecutive.

Lucian Tuţescu

Soluţie. a) Fie $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $p\,(p+17)=n\,(n+1)$. Este evident că $p<n$, deci există $a\geq 1$ astfel încât $n=p+a$.

Deoarece pentru $a\geq 8$ avem $n\,(n+1)\geq (p+8)\,(p+9)=p^2+17p+72>p\,(p+17)$, rezultă $1\leq a\leq 7$. **(4p)**

Cum p este prim şi $p\mid n\,(n+1)$, rezultă $p\mid n$ sau $p\mid n+1$. Urmează că $p\mid a$ sau $p\mid a+1$, deci $p\leq a+1\leq 8$, adică $p\in\{2,3,5,7\}$. Singura soluţie este $p=5$, pentru care $n=10$. **(3p)**

2. a) Arătaţi că pentru orice număr natural $n\geq 2$, există $a,b\in\mathbb{N}^*$, distincte, astfel încât $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{n}$.

b) Fie p un număr prim şi $a,b\in\mathbb{N}^*$, distincte, astfel încât $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{p}$. Arătaţi că numărul $a^2+b^2-(a+b)$ este pătrat perfect.

Lucian Petrescu

Soluţie. a) Deoarece $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n\,(n+1)}$, deducem că $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n\,(n+1)}$, deci putem considera $a=n+1$ şi $b=n\,(n+1)$. **(3p)**

b) Aducând la acelaşi numitor relaţia $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{p}$ deducem $(a-p)\,(b-p)=p^2$.

Putem presupune că $a<b$, deci $a-p<b-p$ şi atunci, cum p este prim, din relaţia anterioară rezultă $a-p=1$ şi $b-p=p^2$, de unde se obţine $a=p+1$ şi $b=p\,(p+1)$.

Atunci $b=a\,(a-1)=a^2-a$, deci $a^2+b^2-(a+b)=\left(a^2-a\right)+\left(b^2-b\right)=b+\left(b^2-b\right)=b^2$. **(4p)**

3. Fie $a\geq 2$ un număr natural prim. Determinaţi numerele raţionale x, y, z, t cu proprietatea că

$$x^4+\frac{y^4}{a}+\frac{z^4}{a^2}+\frac{t^4}{a^3}=xyzt.$$

Vasile Pop

Soluţie. a) Evident, $x=y=z=t=0$ este soluţie, iar dacă unul dintre numerele x,y,z,t este egal cu 0, rezultă că $x=y=z=t=0$. **(1p)**

Vom arăta că ecuaţia nu are alte soluţii. Presupunând că există o soluţie cu componente nenule, ecuaţia se poate scrie sub forma

$$a^3x^4+a^2y^4+az^4+t^4=a^3xyzt. \tag{1}$$

Observând că membrul drept este număr pozitiv, înmulţind cu cel mai mic multiplu comun al numitorilor numerelor x, y, z, t, putem presupune că $x,y,z,t\in\mathbb{N}^*$ şi $(x,y,z,t)=1$. **(2p)**

Din relaţia (1) rezultă $a\mid t$, deci $t=at_1$, $t_1\in\mathbb{N}$. Înlocuind în (1) rezultă

$$a^3x^4+a^2y^4+az^4+a^4t_1^4=a^4xzyt_1\Rightarrow a^3t_1^4+a^2x^4+ay^4+z^4=a^3xzyt_1.$$

Repetând raţionamentul de mai sus, obţinem $a\mid z$, apoi $a\mid y$ şi $a\mid z$, contradicţie cu $(x,y,z,t)=1$. **(4p)**

4. Fie $ABCD$ un pătrat şi punctele $M\in DA$, $N\in AB$, $P\in BC$, $Q\in CD$, astfel încât $A\in(MD)$, $B\in(NA)$, $C\in(PB)$, $D\in(QC)$ şi $AM+CP=BN+DQ$. Arătaţi că $MP\perp NQ$.

Florian Dumitrel

Soluţie. Ducem $AE\parallel MP$ şi $BF\parallel NQ$ $\quad(E\in BC,\ F\in CD)$. Din faptul că patrulaterele $AMPE$ şi $BNQF$ sunt paralelograme, rezultă

$$AM+CP=PE+CP=CE \text{ şi } BN+DQ=QF+DQ=DF,$$

deci $[CE]\equiv[DF]$. **(3p)** Întrucât $\Delta ABE\equiv\Delta BCF$ (C.C), deducem că $\widehat{AEB}\equiv\widehat{BFC}$. Dar $\widehat{BFC}\equiv\widehat{ABF}$, de unde obţinem

$$m\left(\widehat{EBF}\right)+m\left(\widehat{AEB}\right)=m\left(\widehat{EBF}\right)+m\left(\widehat{ABF}\right)=90^\circ,$$

deci $AE\perp BF$. Prin urmare, $MP\perp NQ$. **(4p)**

Clasa a VIII-a

1. Se consideră o mulţime M de 2012 numere reale cu proprietatea că pentru orice $a, b \in M$, diferite, numărul $a^2 + b\sqrt{2}$ este raţional.

Arătaţi că, pentru orice $a \in M$, numărul $a\sqrt{2}$ este raţional.

S.L.T.

Soluţie. Fie numerele $a, b, c \in M$ distincte două câte două. Atunci

- $\left(a^2 + b\sqrt{2}\right) - \left(b^2 + a\sqrt{2}\right) \in \mathbb{Q} \Rightarrow \left(a^2 - b^2\right) - (a-b)\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a-b)\left(a+b-\sqrt{2}\right) \in \mathbb{Q}$; **(2p)**
- $\left(c^2 + a\sqrt{2}\right) - \left(c^2 + b\sqrt{2}\right) \in \mathbb{Q} \Rightarrow (a-b)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. **(2p)**

Deoarece $a \neq b$, rezultă $\dfrac{(a-b)\left(a+b-\sqrt{2}\right)}{(a-b)\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$, adică $(a+b)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. **(2p)**

Cum $(a-b)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ şi $(a+b)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, sumând se obţine $2a\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, adică $a\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. **(1p)**

2. Se consideră un număr natural a format cu 9 cifre nenule şi distincte, cu ultima cifră 5. Arătaţi că a nu este pătrat perfect.

[* * *]

Soluţie. Presupunem prin absurd că numărul a este pătrat perfect, adică $a = x^2$, unde x este număr natural cu ultima cifra 5. Deci $x = 10y + 5 \ \ (y \in \mathbb{N}^*)$, de unde rezultă că $x^2 = 100y(y+1) + 25$, ceea ce înseamnă că penultima cifră a lui a este 2. **(2p)** Ultima cifră a numărului $y(y+1)$ este $0, 2$ sau 6. Deoarece 0 nu intră în scrierea lui a, iar 2 ocupă cifra zecilor, deducem că cifra sutelor a numărului a este 6. **(2p)** Aşadar, $a = 1000z + 625$. Dar $a = x^2$ şi atunci x se termină cu 25, deci $x = 100t + 25$, $t \in \mathbb{N}$. Prin urmare,

$$a = (100t + 25)^2 = 10000t^2 + 5000t + 625,$$

de unde rezultă că cifra miilor a numărului a este 0 sau 5, ceea ce este imposibil. Presupunerea facută fiind falsă, se obţine concluzia. **(3p)**

3. Se consideră un cub $ABCDA'B'C'D'$. Punctul A se proiectează pe $A'B$, $A'C$, $A'D$ respectiv în P, Q, R. Arătaţi că:

a) $A'C \perp (PQR)$;

b) $APQR$ este patrulater inscriptibil.

[* * *]

Soluţie. a) Dreapta BC este perpendiculară pe planul $(A'AB)$, deci este perpendiculară şi pe $AP \subset (A'AB)$. Rezultă că $AP \perp BC$ şi cum $AP \perp A'B$, deducem că $AP \perp (A'BC)$, deci AP este perpendiculară pe dreapta $A'C \subset (A'BC)$. Din $AP \perp A'C$ şi $AQ \perp A'C$ rezultă că $A'C \perp (APQ)$ şi, în consecinţă, $A'C \perp QP$. Analog se arată că $A'C \perp QR$, deci $A'C \perp (PQR)$. **(4p)**

b) Deoarece $A'C \perp (APQ)$ şi $A'C \perp (ARQ)$ rezultă că punctele A, P, Q, R sunt coplanare. Dar $AP \perp (A'BC)$ şi $PQ \subset (A'BC)$, de unde rezultă că $AP \perp PQ$. Analog avem $AR \perp RQ$, deci $m\left(\widehat{APQ}\right) + m\left(\widehat{ARQ}\right) = 180^\circ$, ceea ce înseamnă că $APQR$ este patrulater inscriptibil. **(3p)**

4. Se consideră 100 de puncte în plan $M_1, M_2, \ldots, M_{100}$ şi un pătrat de latură 1. Arătaţi că există două vârfuri adiacente A, B ale pătratului astfel ca suma perimetrelor triunghiurilor AM_1B, $AM_2B, \ldots$, $AM_{100}B$ să fie mai mare ca 241.

Vasile Pop

Soluţie. Fie A şi A' două vârfuri opuse ale pătratului. Pentru orice punct M_i avem

$$AM_i + A'M_i \geq AA' = \sqrt{2}, \ i = \overline{1,100}. \quad \textbf{(2p)}$$

Adunând aceste relaţii obţinem $S_A + S_{A'} \geq 100\sqrt{2}$, deci cel puţin una din sume este mai mare ca $50\sqrt{2}$, fie $S_A \geq 50\sqrt{2}$. **(2p)** Analog pentru celelalte două vârfuri opuse B şi B' obţinem o sumă $S_B \geq 50\sqrt{2}$, astfel că $S_A + S_B \geq 100\sqrt{2}$ şi evident vârfurile A şi B sunt adiacente. Suma perimetrelor triunghiurilor AM_iB, $i = \overline{1,100}$ va fi

$$S \geq 100\sqrt{2} + 100 \geq 100 \cdot 1,41 + 100 = 241. \ \textbf{(3p)}$$

Clasa a IX-a

1. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Demonstraţi inegalitatea:

$$\frac{a}{3b^2+2bc+3c^2}+\frac{b}{3c^2+2ca+3a^2}+\frac{c}{3a^2+2ab+3b^2}\geq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right).$$

Costel Anghel

Soluţie. Membrul stâng al inegalităţii se poate scrie:

$$MS=\frac{a^2}{3a\left(b^2+c^2\right)+2abc}+\frac{b^2}{3b\left(c^2+a^2\right)+2abc}+\frac{c^2}{3c\left(a^2+b^2\right)+2abc}\overset{(\mathbf{2p})}{\geq}$$

$$\geq\frac{(a+b+c)^2}{3\left(ab^2+a^2b+ac^2+a^2c+b^2c+bc^2+2abc\right)}\overset{(\mathbf{2p})}{=}\frac{(a+b+c)^2}{3\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(a+b+b+c+c+a)^2}{3\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)}\geq$$

$$\geq\frac{3}{4}\cdot\frac{(a+b)(b+c)+(b+c)(c+a)+(c+a)(a+b)}{3\left(a+b\right)\left(a+c\right)\left(b+c\right)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right).\ \mathbf{(3p)}$$

2. Determinaţi numerele reale x care au proprietatea

$$\frac{n}{n+1}<x<\frac{2n+1}{n}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Florian Dumitrel

Soluţie. Notăm $M=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{n}{n+1}<x<\frac{2n+1}{n},\ (\forall)\,n\in\mathbb{N}^*\right\}$. Întrucât

$$\frac{n}{n+1}<1<2<\frac{2n+1}{n},$$

oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $[1,2] \subset M$. **(3p)**

Presupunem prin absurd că $M \not\subseteq [1,2]$, deci există $a \in M$ astfel încât $a \notin [1,2]$.

• Dacă $0<a<1$, atunci $\frac{n}{n+1}<a<1$ pentu orice $n\in\mathbb{N}^*$, adică $n<\frac{1}{1-a}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, ceea ce înseamnă că mulţimea numerelor naturale este mărginită, contradicţie. **(2p)**

• În cazul $a>2$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, avem:

$$2<a<\frac{2n+1}{n}\Rightarrow 0<a-2<\frac{1}{n}\Rightarrow n<\frac{1}{a-2}.$$

Am ajuns la aceeaşi contradicţie. Deci $M \subset [1,2]$. **(2p)**

În concluzie, $M=[1,2]$.

3. Se consideră numerele raţionale pozitive q_1, q_2, ..., q_{2012} cu suma egală cu 1. Pentru fiecare număr natural n, considerăm numărul

$$a_n=\{nq_1\}+\{nq_2\}+...+\{nq_{2012}\},$$

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului real x. Determinaţi cel mai mare element al mulţimii $A=\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$.

O.T.V.

Soluţie. Deoarece $a_n=n\left(q_1+q_2+...+q_{2012}\right)-[nq_1]-[nq_2]-...-[nq_{2012}]$, rezultă că $a_n\in\mathbb{Z}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

În plus, cum $0\leq\{x\}<1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, rezultă că $0\leq a_n<2012$, adică $a_n\leq 2011$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$. **(2p)**

Fie $q_k=\frac{b_k}{c_k}$, cu $b_k, c_k\in\mathbb{N}^*$, $(b_k,c_k)=1$, unde $k=1,2,...,2012$. Pentru $N=c_1c_2...c_{2012}-1$ se obţine că

$$\{Nq_k\}=\left\{b_k\cdot\frac{c_1c_2...c_{2012}}{c_k}-\frac{b_k}{c_k}\right\}=\{-q_k\}=1-q_k,$$

deci $a_N = 2012- (q_1 + q_2 + ... + q_{2012}) = 2011$. Ca urmare, $\max A = 2011$. **(5p)**

4. Fie ABC un triunghi, I centrul cercului său înscris şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CA)$ astfel încât $[AM] \equiv [BN] \equiv [CP]$. Arătaţi că dacă

$$AB \cdot \overrightarrow{IM} + BC \cdot \overrightarrow{IN} + CA \cdot \overrightarrow{IP} = \overrightarrow{0},$$

atunci triunghiul ABC este echilateral.

Claudiu Mîndrilă, Târgovişte

Soluţie. Fie $AM = x$. Avem $AB \cdot \overrightarrow{AM} = AM \cdot AB \cdot \left(\frac{1}{AM} \cdot \overrightarrow{AM}\right) = AM \cdot \overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AB}$ şi similar, $BC \cdot \overrightarrow{BN} = BN \cdot \overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{BC}$ şi $CA \cdot \overrightarrow{CP} = CP \cdot \overrightarrow{CA} = x\overrightarrow{CA}$.

Atunci $AB \cdot \overrightarrow{AM} + BC \cdot \overrightarrow{BN} + CA \cdot \overrightarrow{CP} = x\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{0}$. **(1p)**

Scriind $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IA}$ şi analoagele, obţinem

$$AB \cdot \overrightarrow{IM} + BC \cdot \overrightarrow{IN} + CA \cdot \overrightarrow{IP} = AB \cdot \overrightarrow{IA} + BC \cdot \overrightarrow{IB} + CA \cdot \overrightarrow{IC},$$

şi ţinând seama de ipoteză, rezultă $AB \cdot \overrightarrow{IA} + BC \cdot \overrightarrow{IB} + CA \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$. **(2p)** Scriind $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_I}$ şi analoagele, se obţine

$$(a + b + c)\,\overrightarrow{r_I} = c\overrightarrow{r_A} + a\overrightarrow{r_B} + b\overrightarrow{r_C}\ ,$$

de unde, cum $(a + b + c)\,\overrightarrow{r_I} = a\overrightarrow{r_A} + b\overrightarrow{r_B} + c\overrightarrow{r_C}$, rezultă $a\overrightarrow{r_A} + b\overrightarrow{r_B} + c\overrightarrow{r_C} = c\overrightarrow{r_A} + a\overrightarrow{r_B} + b\overrightarrow{r_C}$. **(3p)**

Considerând originea reperului în A, rezultă $b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$, deci $a = b = c$, adică triunghiul ABC este echilateral. **(1p)**

Clasa a X-a

1. Rezolvaţi ecuaţia $2012^{x^3} + \log_{2012} x = 2012^{x^2}$.

Lucian Tuţescu, Aurel Chiriţă

Soluţie. Observând că $\log_{2012} x = \log_{2012} x^3 - \log_{2012} x^2$, ecuaţia se scrie sub forma $2012^{x^3} + \log_{2012} x^3 = 2012^{x^2} + \log_{2012} x^2$ **(3p)** şi considerând funcţia strict crescătoare (deci injectivă) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(u) = 2012^u + \log_{2012} u$, se obţine $f(x^3) = f(x^2)$, deci $x^3 = x^2$. Unica soluţie este $x = 1$. **(4p)**

2. Determinaţi termenul general al şirului $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale nenule astfel încât

$$2^{x_1} + 2^{2x_2} + 2^{3x_3} + ... + 2^{nx_n} = \frac{2}{x_n}, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Ludovic Longaver

Soluţie. Avem $x_1 = 1$ şi $x_n > 0$, pentru orice $n \geq 1$. Vom demonstra prin inducţie că $x_n = \frac{1}{n}$, pentru orice $n \geq 1$. **(1p)**

Presupunând că $x_k = \frac{1}{k}$, pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$, vom demonstra că $x_n = \frac{1}{n}$. Ţinând cont de ipoteza de inducţie, din relaţia din enunţ rezultă că

$$2^{nx_n} + 2(n-1) = \frac{2}{x_n}. \quad \textbf{(1p)}$$

Membrul stâng al egalităţii de mai sus reprezintă o funcţie strict crescătoare în variabila $x_n > 0$, iar membrul drept o funcţie strict descrescătoare în aceeaşi variabilă. Ca urmare, egalitatea $2^{nx_n} + 2(n-1) = \frac{2}{x_n}$ are loc pentru cel mult o valoarea $x_n > 0$. Cum $\frac{1}{n}$ verifică egalitatea, deducem că $x_n = \frac{1}{n}$, ceea ce încheie demonstraţia. **(5p)**

3. Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 4x + 5}, \qquad g(x) = \sqrt{x^4 - 9x^2 - 2x + 26}$$

şi numerele $m = \min\{f(x) + g(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $M = \max\{f(x) - g(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Arătaţi că $m = M$.

Vasile Pop

Soluţie. Avem

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{(x+2)^2 + (x^2+1)^2} = d(M, A) \\ g(x) &= \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-5)^2} = d(M, B) \end{aligned}$$

unde $M(x, x^2)$, $A(-2, -1)$ şi $B(1, 5)$. **(2p)**

Considerând funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, observăm că $M(x, x^2) \in G_f$. Problema revine la a demonstra că

$$\min\{MA + MB \mid M \in G_f\} = \max\{MA - MB \mid M \in G_f\}.$$

Dreapta AB este graficul funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$, care intersectează G_f în punctele $C(-1, 1)$ şi $D(3, 9)$. **(1p)**

Pentru orice $M \in G_f$, avem:

- $MA + MB \geq AB = 3\sqrt{5}$ şi, cum $AB = CA + CB$, deducem că $\min\{MA + MB \mid M \in G_f\} = AB$, care se atinge pentru $M = C$; **(2p)**
- $MA - MB \leq AB = 3\sqrt{5}$ şi, cum $AB = DA - DB$, deducem că $\max\{MA - MB \mid M \in G_f\} = AB$, care se atinge pentru $M = D$. **(2p)**

4. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{Q}_+^* \to \mathbb{Q}_+^*$ care verifică relaţiile

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{şi} \quad (x+2) f(x) = (x+1) f(x+1), \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{Q}_+^*.$$

Soluţie. Demonstrăm prin inducţie matematică după suma $p+q$, unde $p,q \in \mathbb{N}^*$, $(p,q)=1$, că

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{2}\cdot f\left(1\right)\cdot\left(p+q\right). \quad (\mathbf{1p})$$

Suma $p+q$ este minimă când $p=q=1$, pentru care egalitatea de mai sus este adevărată.

Fie acum $p,q \in \mathbb{N}^*$, cu $(p,q)=1$. Presupunem relaţia adevărată pentru toate perechile $(p',q') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $(p',q')=1$, cu proprietatea că $p'+q'<p+q$ şi o demonstrăm pentru (p,q).

Deoarece $f\left(\frac{p}{q}\right)=f\left(\frac{q}{p}\right)$, putem presupune $p>q$. Cum $(p-q,q)=1$, rezultă că

$$f\left(\frac{p-q}{q}\right)=\frac{f\left(1\right)}{2}\cdot\left(p-q+q\right)=\frac{f\left(1\right)}{2}\cdot p. \quad (\mathbf{2p})$$

Scriind a doua condiţie din enunţ sub forma $f\left(x+1\right)=\frac{x+2}{x+1}f\left(x\right)$, pentru $x=\frac{p-q}{q}$, obţinem

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{\frac{p-q}{q}+2}{\frac{p-q}{q}+1}\cdot f\left(\frac{p-q}{q}\right)=\frac{p+q}{p}\cdot\frac{f\left(1\right)}{2}\cdot p=\frac{1}{2}\cdot f\left(1\right)\cdot\left(p+q\right),$$

ceea ce încheie demonstraţia prin inducţie.

Notând $f\left(1\right)=2a$, cu $a \in \mathbb{Q}_+^*$, rezultă că funcţiile căutate sunt de forma

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=a\left(p+q\right), \quad \text{pentru orice } p,q \in \mathbb{N}^*, (p,q)=1,$$

care verifică relaţiile din enunţ. **(4p)**

Observaţie. Dacă $x=\frac{m}{n}$, cu $m,n \in \mathbb{N}^*$, se poate scrie $f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{a\left(m+n\right)}{\left(m,n\right)}$.

Clasa a XI-a

1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $\det\left(A^2+A+I_2\right)=\det\left(A^2-A+I_2\right)=3$. Arătaţi că $A^2\left(A^2+I_2\right)=2I_2$.

Marius Perianu

Soluţie. Fie $f(x)=\det(A-xI_2)=x^2-tx+d$, unde $t=\operatorname{Tr}A$ şi $d=\det A$.
Cum $A^2+A+I_2=(A-\varepsilon I_2)\left(A-\varepsilon^2 I_2\right)$, rezultă $\det\left(A^2+A+I_2\right)=f(\varepsilon)f\left(\varepsilon^2\right)=t^2+d^2+1+dt+t-d$.
Analog, $A^2-A+I_2=(A+\varepsilon I_2)\left(A+\varepsilon^2 I_2\right)$, rezultă $\det\left(A^2-A+I_2\right)=f(-\varepsilon)f\left(-\varepsilon^2\right)=t^2+d^2+1-dt-t-d$. **(3p)**
Atunci $dt+t=0$, de unde $t(d+1)=0$, deci $t=0$ sau $d=-1$.
Pentru $t=0$, din $\det\left(A^2+A+I_2\right)=3$ se obţine $d=2$ sau $d=-1$.
Pentru $d=-1$, din $\det\left(A^2+A+I_2\right)=3$ se obţine $t=0$.
Deoarece $A^2=tA-dI_2$, rezultă $A^2=I_2$ sau $A^2=-2I_2$. În ambele cazuri se obţine $A^2\left(A^2+I_2\right)=2I_2$. **(4p)**

2. Fie $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ pentru care există $p,q\in\mathbb{Z}$, $(p,q)=1$,astfel încât $\det\left(A+\dfrac{p}{q}B\right)=0$.
Arătaţi că $p \mid \det A$ şi $q \mid \det B$.

S.L.T.

Soluţie. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\det(A+xB)$. Fără dificultate se demonstrează că

$$f(x)=\det B\cdot x^n+c_{n-1}\cdot x^{n-1}+c_{n-2}\cdot x^{n-2}+...+c_1\cdot x+\det A,$$

unde $c_k\in\mathbb{Z}$ pentru orice $k=1,2,...,n-1$. **(3p)**
Cum $f\left(\dfrac{p}{q}\right)=0$, rezultă $\det B\cdot p^n+cp^{n-1}q+c_{n-2}p^{n-2}q+...+c_1pq^{n-1}+\det A\cdot q^n=0$.
Rezultă $p\mid\det A$, $q\mid\det B\cdot p^n$ şi atunci $q\mid\det B$, deoarece $(p,q)=1$. **(4p)**

3. Fie $(x_n)_{n\geq1}\subset\mathbb{R}_+^*$ un şir mărginit, astfel încât

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x_n+\frac{k}{n^2}}-n\right)=\frac{1}{4}.$$

Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

Florian Dumitrel

Soluţie. Notăm $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{x_n+\dfrac{k}{n^2}}-n$ şi $b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-n$. Arătăm mai întâi că $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{1}{4}$. Pentru $1\leq k\leq n$ avem

$$\frac{k}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}+1\right)}\leq\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1=\frac{k}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1\right)}\leq\frac{k}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}.$$

Prin sumare obţinem

$$\frac{n(n+1)}{2n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}\leq b_n\leq\frac{n(n+1)}{2n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)},$$

de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{1}{4}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$. **(3p)**
Din $a_n-b_n=(x_n-1)\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{x_n+\frac{k}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}$ deducem că

$$|x_n-1|=\frac{|b_n-a_n|}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{x_n+\frac{k}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}}$$

Conform ipotezei, există $M > 0$ astfel încât $0 < x_n \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. În consecinţă,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_n + \frac{k}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}}} \geq \frac{n}{\sqrt{M+1} + \sqrt{2}}.$$

şi

$$|x_n - 1| \leq \frac{\sqrt{M+1} + \sqrt{2}}{n} \cdot |a_n - b_n|,$$

de unde obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. **(4p)**

4. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea

$$a_n - \frac{1}{m} \leq a_m \leq \frac{m}{n}, \ \ (\forall)\, m, n \in \mathbb{N}^*, \ m \geq n.$$

Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Florian Dumitrel

Soluţie. Pentru $m = n$, cu n arbitrar, avem $a_n \leq 1$, deci şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior. **(1p)** Vom arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, unde $a = \sup\{a_n \mid n \geq 1\}$. Fie $\varepsilon > 0$. Din definiţia marginii superioare rezultă că există $n_\varepsilon \geq 1$ astfel încât $a_{n_\varepsilon} > a - \frac{\varepsilon}{2}$, deci

$$a_m \geq a_{n_\varepsilon} - \frac{1}{m} > a - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{m}$$

pentru orice $m \geq n_\varepsilon$. **(3p)** Cum $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{1}{m} = 0$, există $m_\varepsilon \geq n_\varepsilon$ astfel încât $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $m \geq m_\varepsilon$. În consecinţă, pentru orice $m \geq m_\varepsilon$ avem $a - \varepsilon < a_m \leq a$, deci $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = a$. **(3p)**

Clasa a XII-a

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale nenule convergent la zero. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit primitive şi au proprietatea

$$f(x + a_n) = f(x) + a_n, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \geq 1.$$

Soluţie. Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcţiei f. Pentru fiecare număr natural $n \geq 1$, considerăm funcţia

$$G_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ G_n(x) = F(x + a_n) - F(x) - a_n x.$$

Întrucât $G_n' = 0$, există $b_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $G_n(x) = b_n$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Prin urmare,

$$b_n = G_n(0) = F(a_n) - F(0) \to 0.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F(a_n) - F(0)}{a_n} = F'(0) = f(0)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, avem:

$$f(x) = F'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(x + a_n) - F(x)}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(x + \frac{b_n}{a_n} \right) = x + f(0).$$

Deci $f = 1_{\mathbb{R}} + c, \ c \in \mathbb{R}$.

2. Arătaţi că orice grup de matrice din $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ în raport cu înmulţirea matricelor, al cărui element neutru este diferit de I_2, este izomorf cu un subgrup al grupului $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Marian Andronache

Soluţie. Notăm cu E elementul neutru al grupului G. Atunci $E^2 = E$ şi, cum $E \neq I_2$, rezultă $\det E = 0$. Pentru orice $A \in G$ avem $AE = A$, de unde $\det A = 0$. Întrucât

$$A^2 - t \cdot A + \det A \cdot I_2 = 0_2,$$

unde $t = Tr(A)$, rezultă că $A^2 = t \cdot A$.

Dacă $A' \in G$ astfel încât $AA' = A'A = E$, atunci $A^2 A' = tAA' = tE$, de unde $A = tE$. Deci orice matrice $A \in G$ este de forma $A = \alpha E$ cu $\alpha \in \mathbb{C}$.

• Dacă $0_2 \in G$, atunci $E = 0_2$ (pentru că $E = AA'$ pentru orice $A \in G$), deci $G = \{0_2\}$, caz în care $G \simeq (\{1\}, \cdot)$.

• Dacă $0_2 \notin G$, considerăm funcţia

$$f : G \to A, \ f(A) = \alpha, \ \text{dacă } A = \alpha E.$$

Funcţia f este bine definită pentru că $E \neq 0_2$ şi din $\alpha E = \beta E$ rezultă $\alpha = \beta$. În plus, dacă $A = \alpha E$ şi $B = \beta E$, atunci $AB = \alpha\beta E$, deci $f(AB) = \alpha\beta = f(A) f(B)$, ceea ce înseamnă că f este morfism de grupuri.

Fie $A = \alpha E$ şi $B = \beta E$, astfel încât $f(A) = f(B)$. Rezultă $\alpha = \beta$, adică $A = B$, deci f este injectivă. Cum $f(G)$ este subgrup în $(\mathbb{C}^*, .)$, deducem că $G \simeq f(G)$.

3. Fie $n \geq 2$ un număr natural liber de pătrate, D_n mulţimea divizorilor naturali ai numărului n şi $\mathcal{D} \subset D_n$ o mulţime cu proprietăţile:

a) $1 \in \mathcal{D}$;

b) Dacă $x \in \mathcal{D}$ atunci $\dfrac{n}{x} \in \mathcal{D}$;

c) Dacă $x, y \in \mathcal{D}$ atunci $(x, y) \in \mathcal{D}$, unde (x, y) este cel mai mare divizor comun al numerelor x şi y.

Arătaţi că numărul de elemente al mulţimii $\mathcal{D}$ este de forma 2^k, cu $k \in \mathbb{N}$.

Vasile Pop

Soluţie. Deoarece n este liber de pătrate, există numerele prime distincte $p_1, p_2, \ldots, p_m$ astfel ca $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m$. Orice divizor al lui n (element din D_n) este de forma

$$d = p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_k},$$

unde $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}$ sunt numere prime distincte din mulţimea $M = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$.

Definim funcţia $f : D_n \to \mathcal{P}(M)$, prin: $f(1) = \emptyset$ şi $f(p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_k}) = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}\}$. Funcţia f este bijectivă şi atunci $|\mathcal{D}| = |f(\mathcal{D})|$. Vom determina numărul de elemente ale mulţimii $f(\mathcal{D}) = \mathcal{C} \subset \mathcal{P}(M)$.

Condiţiile a), b), c) devin

a') $\emptyset \in \mathcal{C}$,
b') $X \in \mathcal{C} \;\Rightarrow\; \overline{X} \in \mathcal{C}$, unde $\overline{X} = M \setminus X$,
c') $X, Y \in \mathcal{C} \;\Rightarrow\; X \cap Y \in \mathcal{C}$ (deoarece $f\left(\frac{n}{x}\right) = M \setminus f(x)$ şi $f((x,y)) = f(x) \cap f(y)$.

Proprietăţile a'), b'), c') arată că $(\mathcal{C}, \Delta)$ este un subgrup al grupului $(\mathcal{P}(M), \Delta)$, unde operaţia Δ este diferenţa simetrică
$$X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X \cap \overline{Y}) \cup (Y \cap \overline{X}).$$

Dacă $X, Y \in \mathcal{C}$ atunci din b') rezultă $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathcal{C}$, apoi din c') rezultă $\overline{X} \cap \overline{Y} \in \mathcal{C}$ şi apoi din b') rezultă $\overline{(\overline{X} \cap \overline{Y})} \in \mathcal{C}$ sau $X \cup Y \in \mathcal{C}$.

Acum din $X, Y \in \mathcal{C}$ rezultă $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathcal{C}$, $X \cap \overline{Y}, Y \cap \overline{X} \in \mathcal{C}$ şi apoi $X \Delta Y \in \mathcal{C}$.

Grupul $(\mathcal{P}(M), \Delta)$ are 2^m elemente şi ordinul oricărui subgrup este un divizor al lui 2^m, deci de forma 2^k, $k \le m$. Astfel că $|\mathcal{D}| = |\mathcal{C}| = 2^k$.

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$, astfel încât
$$\int_a^b f(x + \sin n)\ dx \ge \int_a^b f(x)\ dx,$$
pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că $f(a) = f(b)$.

Florian Dumitrel

Soluţie. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem
$$\int_a^b f(x + \sin n)\ dx = \int_{a+\sin n}^{b+\sin n} f(t)\ dt = \Phi(\sin n),$$
unde $\Phi(x) = \displaystyle\int_{a+x}^{b+x} f(t)\ dt,\ x \in \mathbb{R}$.

Fie F o primitivă pe $\mathbb{R}$ a funcţiei f. Deoarece
$$\Phi(x) = F(b + x) - F(a + x),$$
rezultă că Φ este derivabilă pe $\mathbb{R}$ şi $\Phi'(x) = f(b + x) - f(a + x)$.

Din ipoteză rezultă că $\Phi(\sin n) \ge \Phi(0)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Având în vedere că Φ este continuă şi mulţimea $\{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\}$ este densă în $[-1, 1]$, deducem că
$$\Phi(x) \ge \Phi(0), \quad (\forall)\, x \in [-1, 1].$$
Conform teoremei lui Fermat avem $\Phi'(0) = 0$, adică $f(a) = f(b)$.

Baraj Juniori II

1. Determinaţi numerele de patru cifre distincte care diferă de răsturnatele lor printr-un număr de forma $\overline{abbb}$.

Bogdan Ioniţă, Titu Zvonaru

Soluţie. Fie $\overline{xyzt}$ un număr de patru cifre şi $\overline{txyz}$ răsturnatul său. Vom presupune că $x > t$. Evident, $y \neq z$.

Dacă $y < z$, diferenţa $\overline{xyzt} - \overline{txyz}$ are cifra unităţilor $b = 10 + t - x$, cifra zecilor $b = z - 1 - y$, cifra sutelor $b = 10 + y - z$ şi cifra miilor $a = x - 1 - t$.

Rezultă $10 + y - z = z - 1 - y$, deci $2(z - y) = 11$, imposibil. **(3p)**

Dacă $y > z$, diferenţa $\overline{xyzt} - \overline{txyz}$ are cifra unităţilor $b = 10 + t - x$, cifra zecilor $b = 10 + z - 1 - y$, cifra sutelor $b = y - 1 - z$ şi cifra miilor $a = x - t$.

Se obţine $y - z = 5$, $x - t = 6$, $a = 6$, $b = 4$. Ţinând cont că x, y, z, t sunt cifre distincte, din relaţiile $y - z = 5$, $x - t = 6$ se obţin soluţiile 7501, 7831, 7941, 8502, 8612, 8912, 9503, 9613, 9723. **(4p)**

2. Se consideră un număr natural $n \geq 1$, astfel încât n şi $5n$ au împreună un număr par de cifre. Arătaţi că n conţine cifra 1.

[* * *]

Soluţie. Dacă n are k cifre, atunci $10^{k-1} \leq n \leq 10^k - 1$. Rezultă

$$10^{k-1} \leq n < 5n < 10n \leq 10^{k+1} - 10 < 10^{k+1},$$

deci $5n$ are k sau $k+1$ cifre (nu poate avea $k+2$ cifre!). **(3p)** Ca urmare, pentru scrierea celor două numere se folosesc în total $2k$ sau $2k+1$ cifre. Folosind ipoteza deducem că n şi $5n$ au câte k cifre. Dacă prima cifră a lui n ar fi cel puţin 2, atunci

$$n \geq 2 \cdot 10^{k-1} \Rightarrow 5n \geq 10^k,$$

adică numărul $5n$ ar avea $k+1$ cifre, ceea ce nu este posibil. Deci prima cifră a lui n este 1. **(4p)**

3. Fie r un număr prim. Determinaţi numerele naturale $n \geq 1$ care au proprietatea

$$d_1 d_2 ... d_k = n^r,$$

unde $d_1, d_2, ..., d_k$ sunt divizorii lui n.

Florian Dumitrel

Soluţie. Evident $n = 1$ este soluţie. Considerăm în continuare $n \geq 2$.

Întrucât $\{d_1, d_2, ..., d_k\} = \left\{\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, ..., \frac{n}{d_k}\right\}$, rezultă că

$$(d_1 d_2 \cdot ... \cdot d_k)^2 = (d_1 d_2 \cdot ... \cdot d_k)\left(\frac{n}{d_1} \cdot \frac{n}{d_2} \cdot ... \cdot \frac{n}{d_k}\right) = n^k,$$

deci $n^k = n^{2r}$, de unde $k = 2r$. **(2p)**

Dacă $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_s^{\alpha_s}$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s \in \mathbb{N}^*$ (descompus în factori primi), atunci numărul divizorilor lui n este dat de formula

$$\tau(n) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) ... (1 + \alpha_s),$$

deci $(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) ... (1 + \alpha_s) = 2r$. **(1p)** Prin urmare, avem două posibilităţi:

- $s = 2$, $1 + \alpha_1 = 2$, $1 + \alpha_2 = r$, pentru care se obţin soluţii de forma $n = pq^{r-1}$, unde p şi q sunt numere prime distincte; **(2p)**
- $s = 1$, $1 + \alpha_1 = 2r$, pentru care se obţin soluţii de forma $n = p^{r-1}$, unde p este număr prim. **(2p)**

4. În fiecare pătrăţel al unei table 5×5 se plasează la întâmplare câte un număr de la 1 la 25, astfel încât oricare două pătrăţele să conţină numere diferite.

a) Demonstraţi că există două linii şi două coloane care au proprietatea că pătrăţelele situate la intersecţiile acestora conţin numai numere impare.

b) Există întotdeauna două linii şi două coloane aşa încât pătrăţelele situate la intersecţiile acestora să conţină numai numere pare?

Florian Dumitrel

Soluţie. a) **(4p)** Observăm mai întâi că există măcar o linie care conţine cel puţin trei numere impare (principiul cutiei). Fără a micşora generalitatea, putem presupune că prima linie este una dintre liniile care conţin cele mai multe numere impare.

Dacă numerele de pe prima linie sunt toate impare, atunci una dintre celelalte linii conţine cel puţin două numere impare (din cele 8 rămase). Cerinţa este satisfăcută!

Dacă prima linie conţine 4 numere impare, atunci una dintre liniile rămase conţine cel puţin 3 numere impare (din cele 9 rămase). Şi în acest caz cerinţa este satisfăcută.

Dacă prima linie conţine 3 numere impare, folosind din nou principiul cutiei, deducem că mai există alte două linii, de exemplu liniile 2 şi 3, care conţin câte 3 numere impare. Să presupunem că cele 3 numere impare de pe prima linie sunt situate pe primele trei coloane, iar cele 3 numere impare de pe a doua linie sunt situate pe ultimele trei coloane (orice altă dispunere a numerelor impare pe a doua linie răspunde cerinţei).

• În cazul în care la intersecţia liniei 3 cu colana 3 avem un număr impar, unul dintre celelalte două numere impare de pe linia 3 se află la stânga sau la dreapta acestuia, de exemplu pe coloana 1. Atunci numerele situate la intersecţiile liniilor 1 şi 3 cu coloanele 1 şi 3 sunt toate impare (vezi figura 1).

• În cazul în care la intersecţia liniei 3 cu colana 3 avem un număr par, două dintre cele trei numere impare de pe linia 3 se află la stânga sau la dreapta numărului par, de exemplu pe coloanele 1 şi 2. Numerele situate la intersecţiile liniilor 1 şi 3 cu coloanele 1 şi 2 sunt toate impare (vezi figura 2).

b) **(3p)** Răspunsul este negativ. Poziţionând cele 12 numere pare ca în figura 3, observăm că nu există două linii şi două coloane aşa încât pătrăţelele situate la intersecţiile acestora să conţină numai numere pare.

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \times & \times & \times \\ \times & \cdot & \times & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Figura 1

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \times & \times & \times \\ \times & \times & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Figura 2

$$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \times & \times & \times \\ \cdot & \times & \cdot & \times & \cdot \\ \times & \cdot & \cdot & \cdot & \times \\ \times & \cdot & \cdot & \times & \cdot \end{pmatrix}$$

Figura 3

Baraj Juniori I

1. Se consideră numerele prime $p_1 < p_2 < ... < p_{99}$. Arătaţi că numerele

$$p_1 + p_2\ ,\ p_2 + p_3\ , ...,\ p_{98} + p_{99}\ ,\ p_{99} + p_1$$

nu pot fi toate pătrate perfecte.

Marius Ghergu

Soluţie. Procedăm prin reducere la absurd. Analizăm mai întâi cazul $p_1 \geq 3$, deci toate cele 99 de numere prime sunt impare, ceea ce înseamnă că $p_k + p_{k+1}$ este pătrat perfect par, adică este multiplu de 4.

Presupunem că $p_1 \equiv 1 \pmod 4$; analog se raţionează dacă $p_1 \equiv 3 \pmod 4$.

Deoarece p_2 este prim impar, iar $4 \mid (p_1 + p_2)$, rezultă că $p_2 \equiv 3 \pmod 4$. Apoi, cum $4 \mid (p_2 + p_3)$, rezultă că $p_3 \equiv 1 \pmod 4$. Continuând raţionamentul, deducem că $p_1 \equiv p_3 \equiv p_5 \equiv ... \equiv p_{99} \equiv 1 \pmod 4$, iar $p_2 \equiv p_4 \equiv p_6 \equiv ... \equiv p_{98} \equiv 3 \pmod 4$. Rezultă $p_{99} + p_1 \equiv 2 \pmod 4$, contradicţie. **(3p)**

Dacă $p_1 = 2$, atunci $p_1 + p_2$ este pătrat perfect impar, deci $p_1 + p_2 \equiv 1 \pmod 4$, de unde $p_2 \equiv 3 \pmod 4$. Analog ca mai sus, rezultă $p_3 \equiv p_5 \equiv ... \equiv p_{99} \equiv 1 \pmod 4$, deci $p_1 + p_{99} \equiv 3 \pmod 4$, contradicţie. **(4p)**

4. Şapte drepte au proprietatea că fiecare împarte suprafaţa unui trapez T în două trapeze T_1 şi T_2 cu raportul ariilor $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{1}{2}$. Arătaţi că cel puţin trei dintre aceste drepte sunt concurente.

Vasile Pop

Soluţie. Se arată uşor că există doar două drepte paralele cu bazele care împart trapezul în raportul de arii $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2}$ (sau $\frac{2}{1}$) şi din cele 7 drepte mai rămân 5 care taie laturile opuse ale trapezului T. **(2p)**

Fie M intersecţia uneia din aceste drepte cu linia mijlocie $[EF]$. Ariile celor două trapeze T_1 şi T_2 vor fi $EM \cdot h$ şi $MF \cdot h$, cu raportul $\dfrac{EM}{MF}$ egal cu $\dfrac{1}{2}$ sau cu 2, astfel că punctul M împarte segmentul EF în raportul 2 sau $\dfrac{1}{2}$. **(3p)** Considerând punctele G şi H pe segmentul $[EF]$ astfel ca $EG = GH = HF$ rezultă că fiecare din cele 5 drepte rămase trec prin G sau prin H, deci cel puţin trei din ele trec prin acelaşi punct. **(2p)**