CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ„ADOLF HAIMOVICI”
Etapa locală – Constanța, 16.02.2013
filiera teoretică: profil real, specializarea ştiinţe ale naturii
Clasa a XII-a

Subiectul 1

Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Se defineşte mulţimea $G=\{X(a)=I_2+aA \mid a\in\mathbf{R}-\{-1\}\}$.

a) Să se calculeze A^2.
b) Să se arate că pentru orice $a, b\in\mathbf{R}-\{-1\}$ are loc egalitatea $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+ab)$.
c) Să se arate că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

Subiecul 2

Pe $\mathbf{R}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=3xy-6x-6y+14$.
a) Să se arate că $G=(2,+\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbf{R}$ în raport cu legea dată.
b) Să se arate că legea "$\circ$" admite element neutru.
c) Ştiind că $(G,\circ)$ este grup, să se arate că funcţia $f:G\to(0,+\infty)$, $f(x)=3x-6$ este izomorfism între grupurile $(G,\circ)$ și $((0,+\infty),\cdot)$.

Subiectul 3

Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{4x^2+ax+4}{\sqrt{x^2+16}}$, $a\in\mathbf{R}$.

a) Pentru $a=16$ să se calculeze $\int f(x)\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+16}}{2x}dx$, unde $x\in(0,+\infty)$.
b) Să se determine parametrul real *a* astfel incât orice primitivă a funcţiei *f* să fie crescătoare pe $\mathbf{R}$.
c) Să se determine parametrii reali *a*, *m*, *n* astfel încât $\int f(x)dx=(mx+n)\sqrt{x^2+16}+n\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2+16}}dx$.

Subiectul 4

Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\min\left(x,\dfrac{2}{1+x^2}\right)$.

Să se arate că funcţia *f* admite primitive pe $\mathbf{R}$ și să se determine o primitivă $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ a funcţiei *f* cu proprietatea că $F(0)=2013$.

Notă:
Timp de lucru: 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7
Nu se acordă puncte din oficiu