OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 16.02.2013 –
CLASA A IX-A
Subiecte

1. a. Arătaţi că pentru oricare numere reale a,b strict pozitive are loc inegalitatea :

$$\frac{ab-1+\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)}}{a+b}\le\frac{a+b}{2}\quad .$$

b. Dacă x,y,z sunt numere reale strict pozitive şi $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$ arătaţi că:

$$\frac{\sqrt{z(x+1)(y+1)}}{1-\sqrt{xy}}+\frac{\sqrt{x(y+1)(z+1)}}{1-\sqrt{yz}}+\frac{\sqrt{y(z+1)(x+1)}}{1-\sqrt{zx}}\le 2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)$$

Prof. Gabriel Necula, Breaza

2. Fie $a\in\left(0;\frac{3}{4}\right]$. Demonstraţi că $\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n}\right]=\left[\frac{1}{2}+\sqrt{n-a}\right]$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Prof. Cezar Stoica, Ploieşti

3. Fie A'∈(BC),B'∈(AC),C'∈(AB) punctele de tangenţă ale cercului înscris in triunghiul ABC cu laturile sale.
   a. Arătaţi că AA',BB',CC' sunt concurente.
   b. Arătaţi că dacă punctul M verifică egalitatea $a\cdot\overrightarrow{MA'}+b\cdot\overrightarrow{MB'}+c\cdot\overrightarrow{MC'}=\vec{0}$,atunci M este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

Prof. Vasile Stănescu, Ploieşti

4. Se consideră punctele A,B,C,D,E astfel încât $\overrightarrow{DC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EC}=\frac{1}{k-1}\cdot\overrightarrow{DE}$, $C\notin AB$, $k\in\mathbb{R}$, $k>1$. Fie $AC\cap BE=\{O\}$ şi $[AT$ bisectoarea unghiului DAE, $T\in DE$. Dacă $\overrightarrow{OT}$ şi $\overrightarrow{BD}$ sunt coliniari, demonstraţi că *AD = BC* .

Prof. Claudiu Militaru, Ploieşti

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 16.02.2013 –
CLASA A X-A
Subiecte

1. a. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x^3+ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$. Demonstraţi că f e injectivă dacă şi numai dacă $a\geq 0$.

   b. Fie funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g\left(x\right)=x^4+ax+b$. Demonstraţi că g nu poate fi nici injectivă, nici surjectivă, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$.

Prof. Claudiu Militaru, Ploieşti

2. Fie $a,b,c>0$ cu $ab^2c^3=64$ .Determinaţi a,b,c ştiind că $\left(a^a\cdot b^b\cdot c^c\right)^3\leq(abc)^{a+b+c}$.

Prof. Petre Năchilă, Ploieşti

3. Se dau mulţimile $A=\left\{x+ix^2\,|\,x\in\mathbb{R}\right\}, B=\left\{x+i(x-1)\,|\,x\in\mathbb{R}\right\}$.Determinaţi $a\in A,\ b\in B$ astfel încât $\left|z_1-z_2\right|\geq\left|a-b\right|$ pentru orice $z_1\in A,\ z_2\in B$.

Prof. Emil Vasile, Ploieşti

4. Fie a,b,c trei numere complexe distincte de acelaşi modul r .Ştiind că numerele $a-bc, b-ac, c-ab$ sunt reale, determinaţi valoarea lui r .

Gazeta Matematică, 2012

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 16.02.2013 –
CLASA A XI-A
Subiecte

1. Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determinaţi matricele $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ care verifică relaţiile : $X + AY = 2I_2$ şi $BXYX + Y^2X = 2B$.

Prof. Gabriel Necula, Breaza

2. a) Fie a un număr real. Arătaţi că , pentru orice număr natural $n > |a|$, $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \geq 1+a$

b) Arătaţi că, pentru orice număr real x, $e^x \geq 1+x$.

Gazeta Matematică

3. Fie şirurile: $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $x_{n+1} = x_n - ax_n^2$, unde $a \geq 2$ şi $y_n = nx_n, n \geq 1$.

Determinaţi limitele şirurilor $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$.

Prof. Petre Năchilă, Ploieşti

4. Considerăm şirurile: $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = [\ln n]$ şi $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ definit prin determinantul

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n^2-n+1} & a_{n^2-n+2} & \dots & a_{n^2} \end{vmatrix}$$

a) Arătaţi că există un rang $k \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice număr *n* natural, $n > k$, să avem $a_{n^2} - a_n \leq \frac{n-3}{2}$.

b) Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n = 0$.

(am notat cu $[t]$ – partea întreagă a lui t)

Prof. Emil Vasile, Ploieşti

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ, 16.02.2013 –
CLASA A XII-A
Subiecte

1. Fie $a>0$ şi mulţimea $I=\left[\sqrt{a},\sqrt{3a}\right]$. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte operaţia "$\circ$" astfel :

$$x\circ y=\sqrt{2a-\frac{\left(2a-x^2\right)\left(2a-y^2\right)}{a}},\ x,y\in\mathbb{R}.$$

a) Demonstraţi că $(I,\circ)$ este monoid comutativ.

b) Rezolvaţi ecuaţia $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{n}=\sqrt{a}$, $n\in\mathbb{N}^*$ par .

Prof. Claudiu Militaru, Ploieşti

2. a) Să se demonstreze inegalitatea $e^t\geq 1+t+\frac{t^2}{2}$, pentru orice $t\geq 0$.

b) Arătaţi că $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{tgx}\cos x\,dx>\frac{17}{16}$.

Prof. Corneliu Mănescu-Avram, Ploieşti

3. Pentru orice grup $(G,\circ)$ şi orice număr natural n nenul, notăm $A_n=\{x\in G\mid ord\,x=n\}$.

a) Daţi un exemplu de grup G astfel încât $A_n\neq\Phi$ pentru orice număr natural n nenul.

b) Găsiţi G' astfel încât $A_{2n-1}\neq\Phi$ pentru orice număr natural n nenul şi $G'=\bigcup_{n\geq 1}A_{2n-1}$.

Prof. Emil Vasile, Ploieşti

4. Determinaţi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ integrabilă pe $\mathbb{R}$, care admite primitive şi îndeplineşte condiţiile:

a) $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) $\int_0^6 f(x)dx=90$.

Prof.dr. Cătălin Năchilă, Ploieşti

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.