Colegiul Național “Mircea cel Bătrân” Constanța

Concursul Național de Matematică “N. N. Mihăileanu”

Ediția a XIV-a, 24 aprilie 2013

Clasa a XI-a

Subiectul 1

Fie $A, B \in \mathbf{M}_2(\mathbf{C})$.

a) Să se arate că $Tr(AB) = Tr(A) \cdot Tr(B)$ dacă și numai dacă $\det(A+B) = \det A + \det B$.

b) Să se arate că dacă $\det(A^2 - B^2) = 0$ și cel puțin una din matricele $A - B$ sau $A + B$ este neinversabilă, atunci $(AB - BA)^{2013} = O_2$.

Cătălin Zîrnă, Constanța

Subiectul 2

Fie $(x_n)_{n\in N}$ și $(y_n)_{n\in N}$, două șiruri de numere reale pozitive.

a) Dacă șirul $(n + x_n + y_n)_{n\in \mathbf{N}}$ este convergent, arătați că șirul $(x_n \cdot y_n)_{n\in \mathbf{N}}$ este convergent.

b) Arătați că există o infinitate de șiruri de numere reale $(a_n)_{n\in \mathbf{N}}$, pentru care propoziția “$(a_n + x_n + y_n)_{n\in \mathbf{N}}$ este convergent $\Rightarrow (x_n \cdot y_n)_{n\in \mathbf{N}}$ este convergent” este adevărată.

**** * ****

Subiectul 3

Fie $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ o funcție cu proprietatea: $\left|f(z_1^2) - f(z_2^2)\right| \le \left|f(z_1) - f(z_2)\right| \le |z_1 - z_2|$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}$. Demonstrați că *f* este constantă.

Nelu Chichirim, Constanța

Subiectul 4

Fie $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă cu $f(0) = f(1) = 0$ și există $a \in (0, 1)$ cu $f(a) = 1$. Să se arate că există trei puncte pe graficul funcției *f* astfel ca tangentele la grafic în aceste trei puncte să formeze un triunghi dreptunghic isoscel.

Vasile Pop, Cluj-Napoca

Notă. Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă are 7 puncte.