# Colegiul Național “Mircea cel Bătrân” Constanța

## Concursul Național de Matematică “N. N. Mihăileanu”

**Ediția a XIV-a, 24 aprilie 2013**

# Clasa a XII-a

## Subiectul 1

Fie $(G,\cdot)$ un grup și $H$ un subgrup al său. Pentru $k$ natural, $k \geq 2$, fie $H_k = \{x \in G / x^k \in H\}$. Arătați că $H_n \cap H_m$ este subgrup în $(G,\cdot)$ pentru oricare numere naturale $m, n \geq 2$, prime între ele.

***Gabriela Constantinescu, Constanța***

## Subiectul 2

Fie $a, b, x, y$ numere întregi, $d$ un număr întreg mai mare decât 1, liber de pătrate (adică nu se divide cu pătratul niciunui număr prim) și $p$ un număr prim impar care nu divide $d$. Dacă există un număr natural nenul $n$ astfel încât $\left(a+b\sqrt{d}\right)^n = p\left(x+y\sqrt{d}\right)$, să se arate că $p|a,\ p|b$.

***Marius Cavachi, Constanța***

## Subiectul 3

**a)** Calculați $\int \frac{x^2+2x+2}{(x+2)^2} \cdot e^x dx,\ x > -2.$

**b)** Determinați funcțiile $f:(-2,\infty) \to \mathbf{R}$ care admit o primitivă $F:(-2,\infty) \to \mathbf{R}$ cu proprietatea că $F(x) = \frac{x^2+2x+2}{(x+2)^2} - f(x),\ \forall x > -2.$

***Cătălin Zîrnă, Constanța***

## Subiectul 4

Determinați funcțiile continue $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu proprietatea:

$$\frac{1}{y-x} \cdot \int_x^y f(t)dt = f\left(\frac{x+y}{2}\right),\ \forall x,\ y \in \mathbf{R},\ x \neq y.$$

***Nelu Chichirim, Constanța***

**Notă.** Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă are 7 puncte.