



Colegiul Național "Mircea cel Bătrân" Constanța

Concursul Național de Matematică "N. N. Mihăileanu"

Ediția a XIV-a, 24 aprilie 2013

Clasa a VIII-a

Subiectul 1

Fie numerele reale $a, b, c > 0$. Demonstrați că $\frac{a^2 + a + 1 + 3b}{c} + \frac{b^2 + b + 1 + 3c}{a} + \frac{c^2 + c + 1 + 3a}{b} \geq 18$.

Gazeta matematică

Subiectul 2

- a) Stabiliți dacă există numere întregi x, y care să verifice relația $x^2 + 2(y^2 - xy - y - 1) = 2^{2013}$.
- b) Determinați numerele naturale x, y care verifică relația $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$.

Subiectul 3

Fie tetraedrul $ABCD$ în care muchiile opuse sunt congruente două câte două și $O \in (AB)$ un punct oarecare. Construim punctele $M \in (AD)$ astfel încât $OM + MC$ să fie minimă, $N \in (BD)$ astfel încât $ON + NC$ să fie minimă, $P \in (AC)$ astfel încât $OP + PD$ să fie minimă și $Q \in (BC)$ astfel încât $OQ + QD$ să fie minimă. Arătați că $\frac{OM}{MC} + \frac{ON}{NC} = \frac{OP}{PD} + \frac{OQ}{QD}$.

Cătălin Zîrnă, Constanța

Subiectul 4

Fie $ABCD A' B' C' D'$ un cub cu muchia $AB = a, a > 0$. Notăm $\{O\} = AC \cap BD$, M mijlocul muchiei $B' C'$ și N mijlocul muchiei AA' .

- a) Să se calculeze cosinusul unghiului determinat de planele (ONM) și (ABC) ;
- b) Să se calculeze aria triunghiului ONM .

Florian Gache, Constanța

Notă. Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problemă are 7 puncte.